Om konst med hjälp av datorn

Av *Otto Nilsson*

(Denna artikel är ursprungligen publicerad i hembygdstidskriften Rötter, Medlemsblad för Östra Ljungby-Källna socknars hembygdsförening, våren 2004, dock inte kapitel 4, 5, och 6)

En hembygdsförenings främsta uppgift är enligt mångas åsikt att slå vakt om det gamla, att åt eftervärlden bevara och vidarebefordra tidigare generationers kulturyttringar. Detta kan gälla arbete och bostäder lika väl som mode och matvanor eller överhuvudtaget levnadssätt och livskvalitet.

Utan att göra avkall på dessa behjärtansvärda krav är det emellertid enligt min mening angeläget att i en tidskrift som Rötterna även fästa uppmärksamheten vid aktuella företeelser av olika slag – även sådana som kan betecknas som säregna eller udda, d v s i stil med vad som kommer att behandlas i denna artikel.

Vi har under de senaste åren på åtskilliga offentliga platser i vår omgivning kunnat beundra utställningar av färgsprakande tavlor med figurer av sällsam form och högst varierande utseende. Även om man inte fattat vad bilderna föreställer så har helhetsintrycket varit fascinerande.

Bilderna representerar en konstart av matematisk natur som åskådliggörs med datorns hjälp. Konstnären heter *Ingvar Kullberg*, anställd vid Extraco (numera *Gelita*) i Stidsvig, som på sin fritid sysslar med denna konstnärliga verksamhet.

Eftersom red är helt medveten om risken att totalt göra bort sig vid försök att närmare förklara denna konstart, så överlåtes denna uppgift med varm hand åt Ingvar själv!

Önskvärt är emellertid att fenomenet förklaras på ett sådant sätt att även normalkonstruerade hjärnor har möjlighet att hjälpligt sätta sig in i förekommande problem. Detta får naturligtvis inte tolkas som kritik av konsten som sådan utan snarare betraktas som en gardering, baserad på vetskapen om de begränsade matematiska kunskaperna hos folk i allmänhet.

Jag och mina fraktaler

Av *Ingvar Kullberg*

Förord

Eftersom den konstart jag sysslar med av många anses vara synnerligen komplicerad och därmed svårbegriplig har jag blivit nödsakad att här i möjligaste mån förenkla och därmed förkorta denna artikel. (Dock inte versionen för detta dokuments intelligenta läsare!. Här finns censurerade kapitel 4, 5, och 6 med. Tycker du artikeln är för lång eller lider av svårartad matteallergi, kan du glida förbi dessa)!

Så vitt jag förstår sammanfaller detta också med redaktörens önskan!

Därför reserverar jag mig för eventuella brister när det gäller förklaring av en del detaljer som hade vunnit på en utförligare beskrivning och hänvisar dom som vill veta mera till några länkar och skrifter sist i artikeln.

Inledning

Många av mina ärade läsare har förmodligen sett dom småtavlor jag brukar ställa ut med färgsprakande mönster som kallas fraktaler, och därvid fått till livs att de är datorgenererade enligt en ny gren inom matematiken som kallas fraktalgeometri. Denna nya "naturens geometri", som den också kallas, har visat sig vara ett mycket användbart redskap för att beskriva så vitt skilda saker som kustlinjer, bergsformationer, våtmarker, blodkärlens förgreningar, störningsfrekvenser på teleledningar, variationer av aktiekurserna, vädrets variationer, galaxers och galaxhopars fördelning i världsrymden etc. M a o fraktalgeometrin tangerar hela tillvaron. En av de uppslagsändar som fick fraktalgeometrins fader, den polsk-judiske matematikern *Benoit Mandelbrot* verksam i USA, att upptäcka denna nya gren inom matematiken var bomullsprisernas variationer över ett sekel.

1) Hur mitt intresse för fraktaler vaknade

År 1987 var det indienfestival i Sverige. Vid denna tid studerade jag, vid sidan av mitt arbete, sanskrit vid Göteborgs universitet (mitt specialintresse var det inhemska sättet att skriva grammatik i det forntida Indien). En kväll på senhösten satt jag hos några kompisar i Stockholm och såg ett teveprogram om indisk dans. I slutet av programmet talade programledaren lite om teorin bakom dansen. Jag kommer inte ihåg vad han sade i detalj, men det var något i stil med om hur dansens gud, Shiva, omvandlade ordning till kaos och kaos till ordning. Plötsligt visades en karta över Storbritanniens kust och programledaren gled helt naturligt över till att idag har matematikerna funnit att det finns en bakomliggande ordning bakom det oregelbundna. Vad det hela handlade om var den nya kaos och komplexitets- forskningen. Både Mandelbrot och fraktaler omnämndes, fast jag glömde namnen då. Några färgsprakande detaljer ur mandelbrotfiguren visades upp. Det jag kom ihåg efteråt var den känsla av att stå inför det heliga som jag kände när jag såg inslaget. Sedan dröjde det till den efterföljande sommaren 1988 innan jag nästa gång stötte på ämnet i en stor artikel i Dagens Nyheter, söndagsbilagan. Av en ren händelse fanns tidningen på jobbet!

Nu ska jag helt kort förklara begreppet fraktal.

2) Monsterfigurer från förra sekelskiftet

Ordet fraktal är en försvenskning av engelskans fractal och myntades första gången på 1970-talet av den inledningsvis nämnde fraktalgeometrins fader, Benoit Mandelbrot. Mandelbrot bildade ordet från latinets fractus vilket ungefär betyder 'sönderbruten'. M a o. fraktalgeometrin beskriver det som är kantigt och sönderbrutet i tillvaron. En del av rötterna till fraktalgeometrin är monsterfigurer från förra sekelskiftet. En sådan monsterfigur är den s k Koch-kurvan eller Koch snöflinga, uppkallad efter den svenske matematikern Helge von Koch. figur 1 visar hur denna bildas figurmässigt. Alltså:

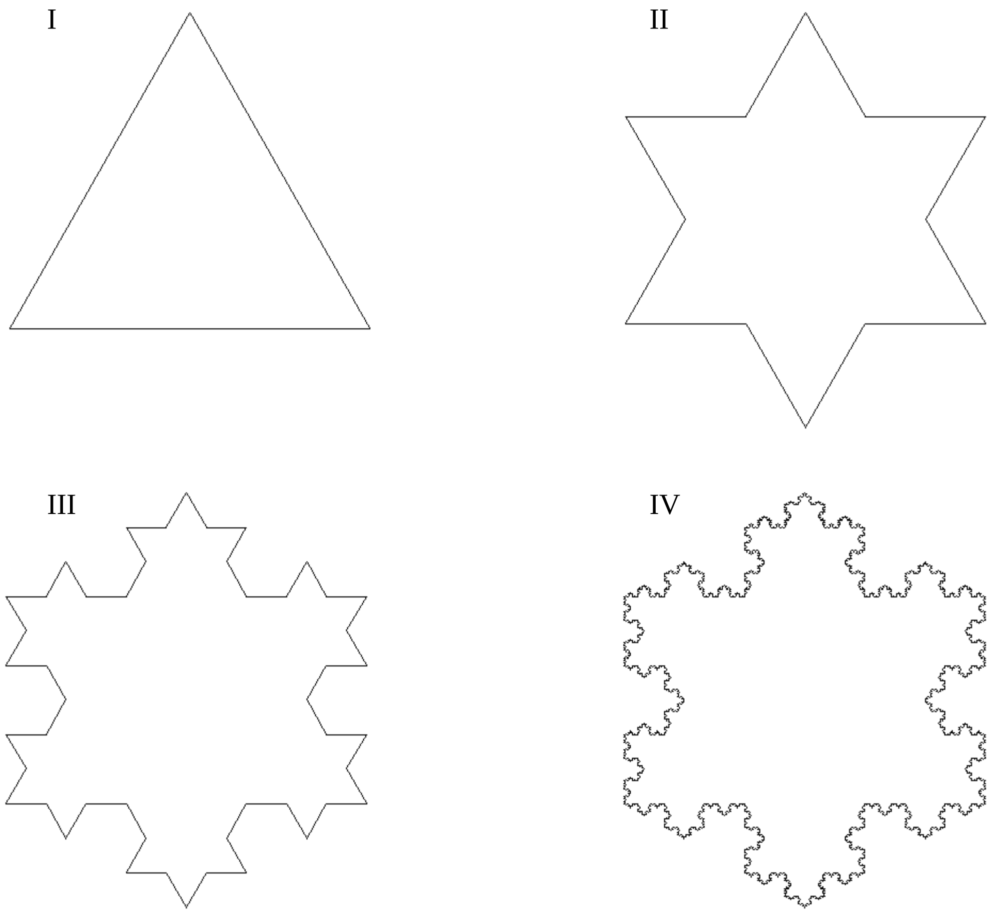


fig 1.

I) Vi utgår från en vanlig liksidig triangel.

II) På var och en av de tre sidorna, ersätter vi mittersta tredjedelen med två sidor i en ny liksidig triangel varvid varje sida sväller upp till fyra sidor, varför den ursprungliga triangeln nu blir en Davidstjärna med 4 x 3 = 12 sidor.

III) På var och en av dessa 12 sidor ersätter vi ånyo mittersta tredjedelen med två sidor av en liksidig triangel.

IV) Efter att i oändlighet upprepat ovanstående operation på alla nya uppkomna sidor, är vår fraktalkurva färdig.

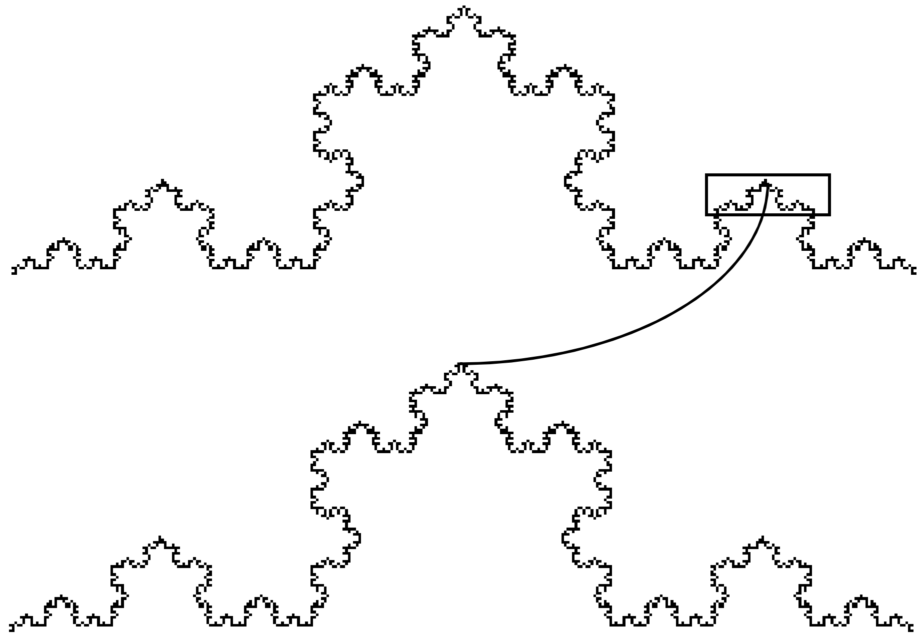


fig 2. Övre delen av Koch snöflinga. Det inramade området se likadant ut som hela överdelen.

Sista figuren är naturligtvis ingen fullt utbildad fraktal. Inte ens en dator kan upprepa en operation i det oändliga, men bilden ovan ger för fantasin en vision av hur den fullt utbildade koch-kurvan ter sig. Med hjälp av denna fraktalkurva skall vi nu titta på vilka egenskaper en fraktal har i största allmänhet:

1) Koch-kurvan liksom andra fraktaler alstras genom att en oftast enkel operation upprepas i det oändliga, s k iteration.

2) För varje iteration ökar koch-kurvans omkrets. När kurvan är klar (om man nu kan säga så när det rör sig om oändligt många iterationer) är omkretsen lika lång som till randen av ett oändligt universum trots att den inneslutna arean är ändligt stor.

3) Vi tittar nu på övre delen av snöflingan (fig 2). Det uppförstorade inramade området ser likadant ut som hela den övre figuren. Hur mycket vi än förstorar återkommer samma mönster. Man säger att en fraktal är självliknande i alla skalor. Kochkurvan och andra monsterkurvor från sekelskiftet ansågs inte ha någonting med verkligheten att göra. Mandelbrot fann emellertid att former i naturen, kustlinjer, berg, molnformationer, åskblixtar etc var mycket mer besläktade med dessa monsterfigurer än med vanliga geometriska objekt, t ex trianglar klot etc. I början av 80-talet gav Mandelbrot ut en bok, *The Fractal Geometry of Nature,* som kommit att bli

en kultbok. Boken inleds med de bevingade orden: *"Moln är inga sfärer, berg är inga koner, kustlinjer är inga cirklar, bark är inte slät, ej heller färdas åskblixten längs en rät linje".* Naturen låter helt enkelt inte sig mätas i den vanliga geometrins begrepp, längd, area etc. Hur lång är bohuskusten till exempel? Det beror på i vilken utsträckning man blundar för uddar och fjordar. Fjordarna har sedan mindre vikar etc. Även om dessa mindre vikar inte är någon exakt kopia av den större viken, har de dock ofta samma grad av kantighet. Även en kustlinje är alltså självliknande om inte i alla, så dock i många skalor. En kustlinje, liksom ett träd eller ett berglandskap är alltså en ansatts till en fraktal. Ju noggrannare man mäter, dess längre blir kusten. Att tala om en kusts längd är alltså meningslöst.

3) Mandelbrotmängden

Den sorts fraktaler jag sysslar med bygger på s k iteration av matematiska funktioner. Den mest kända av dessa fraktalfigurer torde vara mandedelbrot-figuren eller mandelbrotmängden figur 3, uppkallad efter den ovan nämnde Benoit B Mandelbrot. Ca en tredjedel av dom bilder jag publicerat kommer från denna figur. Mandelbrotmängden brukar lite förenklat kallas den mest komplicerade fraktalfigur matematiken känner. Den blir synlig med hjälp av ett datorprogram som räknar fram den enligt en enkel matematisk regel. I nästa avsnitt kommer jag nämna något om den. De andra två tredjedelarna av mina bilder kommer från den fulla motsvarigheten till mandelbrotmängden för s k tredjegradspolynom. Denna mängd är ett fyrdimensionellt monster som därför får snittas i tre- eller tvådimensionella snitt innan man kan titta på den. Mer om detta i kapitel 5.

Figurerna 3-9 visar en kort zoomsekvens i gränsen till mandelbrot-mängden. Första bilden (fig 3) visar hela mandelbrotmängden. De vita rektanglarna i var bild (utom den sista) visar var nästa bild är inzoomad. Gråskalorna visar terrängen runt mängden och gör det möjlig att se grenarna som ibland är oändligt tunna (man har på matematiskt väg bevisat att mängden är sammanhängande). Gränsen till mandelbrotmängden, d v s själva fraktalkurvan, är så sönderbruten att längden av denna (precis som koch-kurvan) är lika lång som till randen av ett oändligt universum. Mandelbrot-mängden består av en hjärtformad kropp på vilken det sitter en oändlig hierarki runda skivor av olika storlek, på vilka det i sin tur sitter en oändlig hierarki mindre runda skivor, på vilka det i sin tur..... . Där själva mängden syns i grenverket, syns den i form av kopior av hela mängden!!! Varje sådan minikopia har dock en omgivning av strukturer som är fullständigt unik för just den minikopian. Samtidigt finns hela mandelbrotmängdens fullhet av former i var och en av dessa minikopior. Således kan man säga att var och en av dessa minikopior uttrycker den samlade mandelbrotmängdens fullhet av former på sitt individuella sätt. Vidståeende zoomsekvens visar detta bättre än tusen ord.

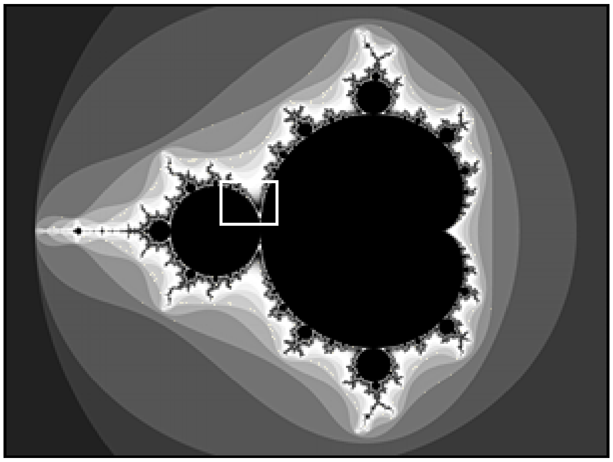


fig 3.

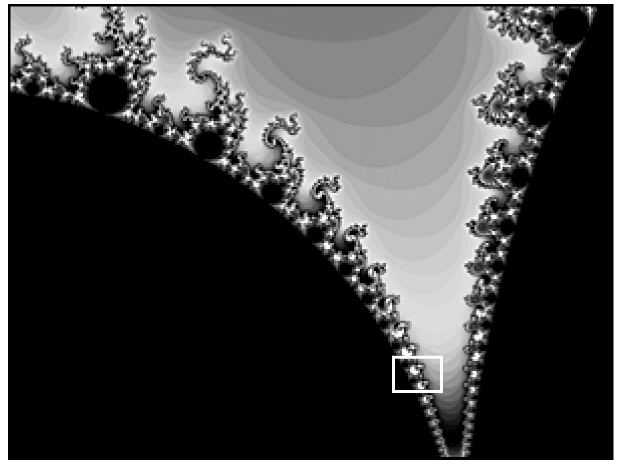


fig 4.

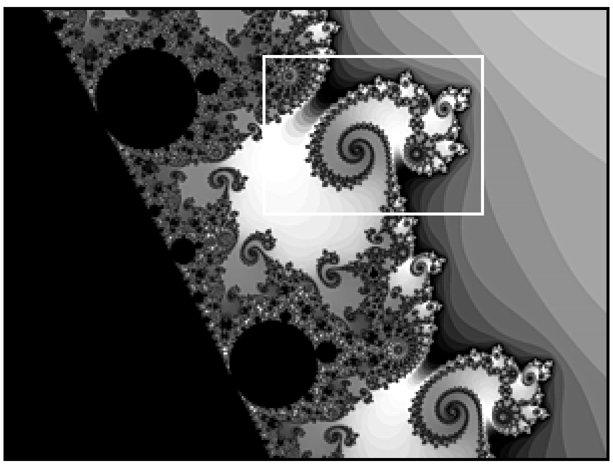


fig 5.

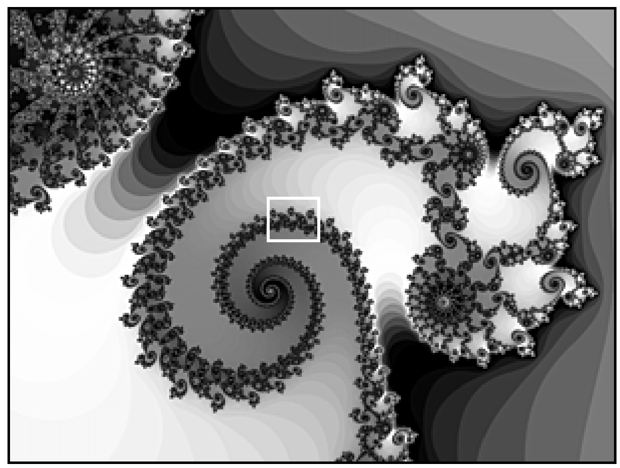


fig 6.

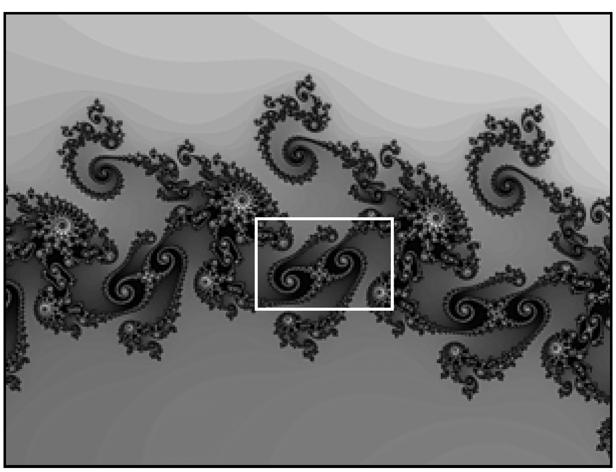


fig 7.

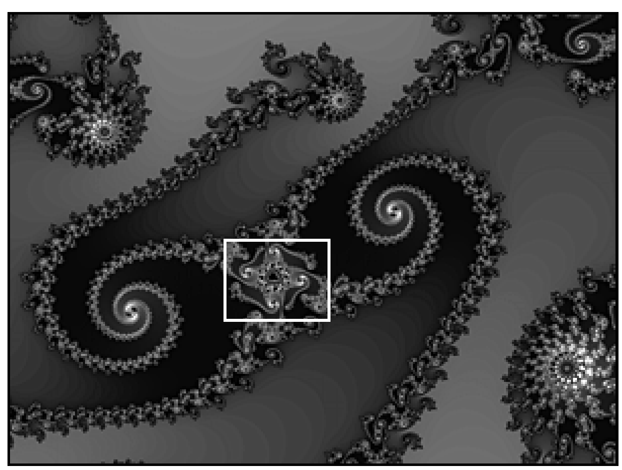


fig 8.

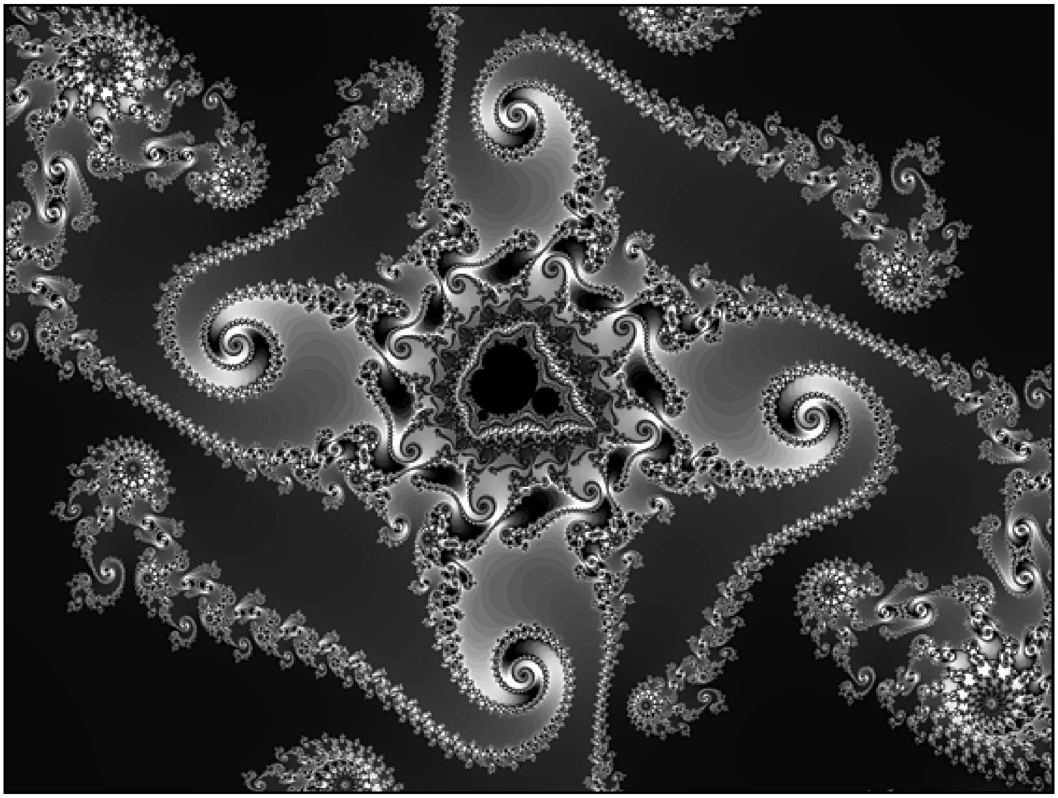


fig 9.

4) Monstermatten bakom mandelbrotmängden

Nu kommer vi till det som skrämmer bort allmogen, matematiken bakom mandelbrotmängden. För att hänga med krävs kännedom om vad s k komplexa tal är för något. Figur 10 nästa sida ger en kort introduktion. Regeln för hur mandelbrotmängden räknas fram är som följer

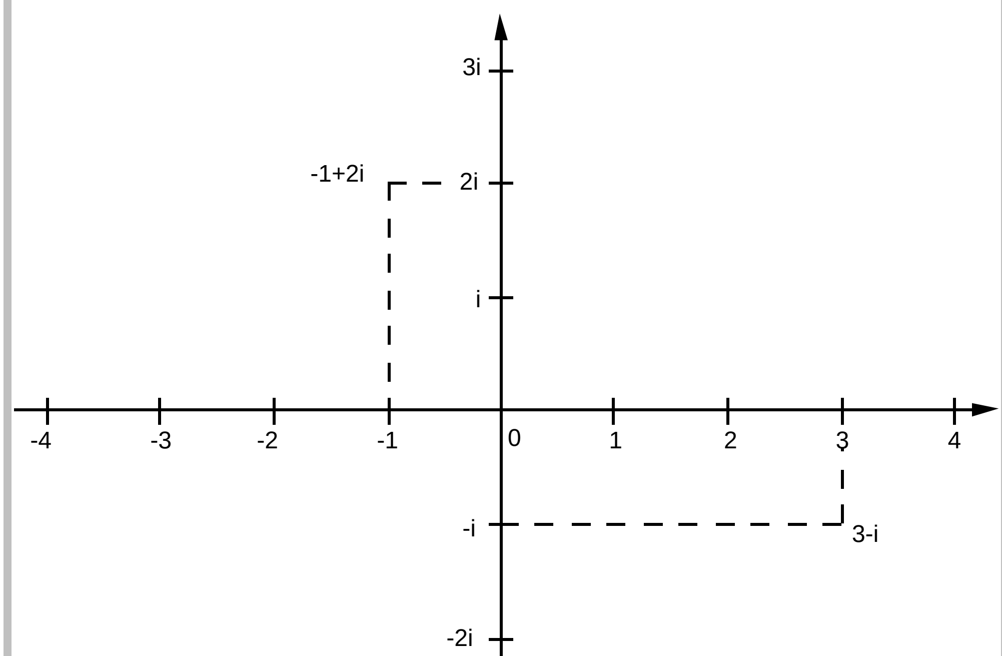
Låt varje pixel, d v s bildpunkt på datorfönstret representera ett komplext tal ”c” Låt ”z” vara en komplex variabel som i utgångsläget är lika med noll. Tillämpa nu iterationsformeln $z \to z^2 + c$. Vad säger nu denna trollformel. Den säger att vi har ett ”z” som vi kvadrerar, d v s multiplicerar med sig själv, varpå vi lägger till konstanten ”c”. När vi gjort det har vi utfört en iteration. Resultatet vi får blir ett nytt ”z” som vi kvadrerar och lägger till konstanten ”c”, etc. I vårt fall är som sagt z = 0 i utgångsläget varför vi får $0 \to 0^2 + c = c \to c^2 + c \to (c^2 + c)^2 + c$, etc. Nu kan två saker hända.

1) För dom allra flesta ”c” rusar variabeln ”z” mot oändligheten, eventuellt efter att först ha utfört en lustiger dans nära nollan, men så fort (absolutbeloppet av) ”z” blivit större än 2 kommer ”z” att växa snabbare och snabbare. Därför kan man låta datorn bryta beräkningarna så fort ”z” blivit

större än 2 och låta datorprogrammet färgsätta den pixel som hör ihop med detta ”c” med en färg enligt en lämplig färgskala som motsvarar det antal iterationer, d v s det antal varv i trollformeln som programmet har utfört innan ”z” passerar radien 2.

2) Eller kommer variabeln ”z” aldrig i evighet att passera radien 2 varför man måste låta datorprogrammet ge upp och färgsätta den pixel som hör ihop med detta ”c” med vanligast svart färg. Det är dessa ”c” som utgör mandelbrotmängden. Det maximala antal iterationer som man låter datorn utföra innan den kapitulerar kan inledningsvis sättas till t ex 100, men måste sedan ökas när man zoomar ner i (gränsen till) mängden. Annars blir vissa områden felaktigt svarta.

Faktaruta: Komplexa talplane



Det finns inget tal på tallinjen som multiplicerat med sig själv blir -1, eller något annat negativt tal heller. Därför har matematikerna uppfunnit de *imaginära* talen, i, 2i 3i, etc där i är definierat så att $i^2 = -1$. Dessa imaginära tal bildar en egen tallinje som ligger vinkelrät mot den vanliga reella tallinjen. På så vis bildas det *komplexa talplanet* (komplex = sammansatt). Figuren ovan visar hur dom båda komplexa talen 3-i och -1+2i ligger i det komplexa talplanet.

fig 10.

5) Det fyrdimensionella kubiska monstret

Om ”trollformeln” för mandelbrotmängden (se föregående kapitel), relaterad till andragrads eller kvadratiska polynom är:

$$z \to z^2 + c$$

där mandelbrotmängden residerar på c- (parameter-) planet och utgörs av de parametrar (= #pixlar) ”c” för vilken den kritiska punkten z = 0 har en begränsad orbit, lyder ”trollformeln” för den fulla motsvarigheten till mandelbrotmängden för kubiska polynom:

$$z \to z^3 - 3a^2z + b$$

där denna "fulla motsvarighet" utgörs av de komplexa parametrar, ”a” och ”b”, för vilka båda dom kritiska punkterna z = +a och z = -a har begränsade orbits. *Att kubiska polynom har två kritiska punkter och en del bilder är körda med avseende på båda dessa är förklaringen till att dessa bilder ser lite dubbelexponerade ut.*

Vidare innebär det faktum att vi har två komplexa parametrar, ”a” och ”b”, d v s att vi har ett koordinatsystem med fyra axlar, a_{reell}, a_{imag}, b_{reell} och b_{imag}. att vi inte har ett parameterplan utan en parameter- ”rymd” med utsträckning i fyra dimensioner, alltså en dimension mer än rummet. Tyvärr har den värld vi lever och rör oss i endast tre rumsdimensioner. I matematikens platoniska värld, kan man dock handskas med hur många dimensioner som helst. Exempelvis kan man beskriva vilka egenskaper monstruösa objekt med fler än tre dimensioner har, samt visa hur dess tredimensionella "skuggor" och genomskärningar ser ut på samma sätt som man kan projicera ner tredimensionella föremål till två dimensioner.

Om högt ärade läsare av denna artikel kunde röra sig ut i en fjärde dimensionen en lagom sträcka skulle ni se alla in- och utsidor samtidigt av det hus ni nu troligen befinner er i. Alla rum och dolda utrymmen skulle ligga vidöppna för er, inbegripet att ni skulle se alla inälvor hos folk och fä som befann sig i huset. Förutsatt att ni hade ert förstånd i behåll, skulle ni sedan kunna tömma husets eventuella kassaskåp utan att öppna låset eller lämna några som helst spår efter er. En fotboll skulle ni, genom att ta ut den i fjärde dimensionen, kunna vända ut och in utan att skada den och sedan återföra den till rummet.

Om vi dödliga skall kunna betrakta hyperrymden för tredjegrads-polynom, får vi göra det i tre- eller tvådimensionella genomskärningar vilket man gör genom att låsa en eller två av axlarna och låta datorn plotta de övriga. Figur 11 nedan visar ett 3D-snitt där axeln b_{imag} pekar in i 4:e dimensionen, och 3d-snittet är gjort vid $b_{imag} = 1$. Motivet är roterad 10 grader uppåt och 10 grader åt vänster från framsidan sett. De mörka tentaklerna är detaljer av M+, den mängd för vilken den kritiska punkten z = +a har begränsad orbit, och de ljusa tentaklerna är detaljer av M-, den mängd för vilken den kritiska punkten z = -a har begränsad orbit Observera att där dessa tentakler slår i en virtuell vägg, 2D-snitten utgörs av kopior av den vanliga mandelbrot-mängden! Denna bild finns i färg (f n sist) på den fraktala delen av min hemsida:

klippan.seths.se/ik/ik

Dom andra bilderna från nr 21 och framåt på svenskdelen visar detaljer av olika 2D snitt av denna hyperrymd. Alla dom ”kubiska” bilderna hittar du dessutom samlade med kommentarer om du klickar *Pictures from Cubic Parameterspace* på min fraktala indexsida

Angående ”fjärde dimensionen”, som i sig inte har med fraktaler att göra, finns en instruktiv sajt:

www.mds.mdh.se/~mas95jed/dim/

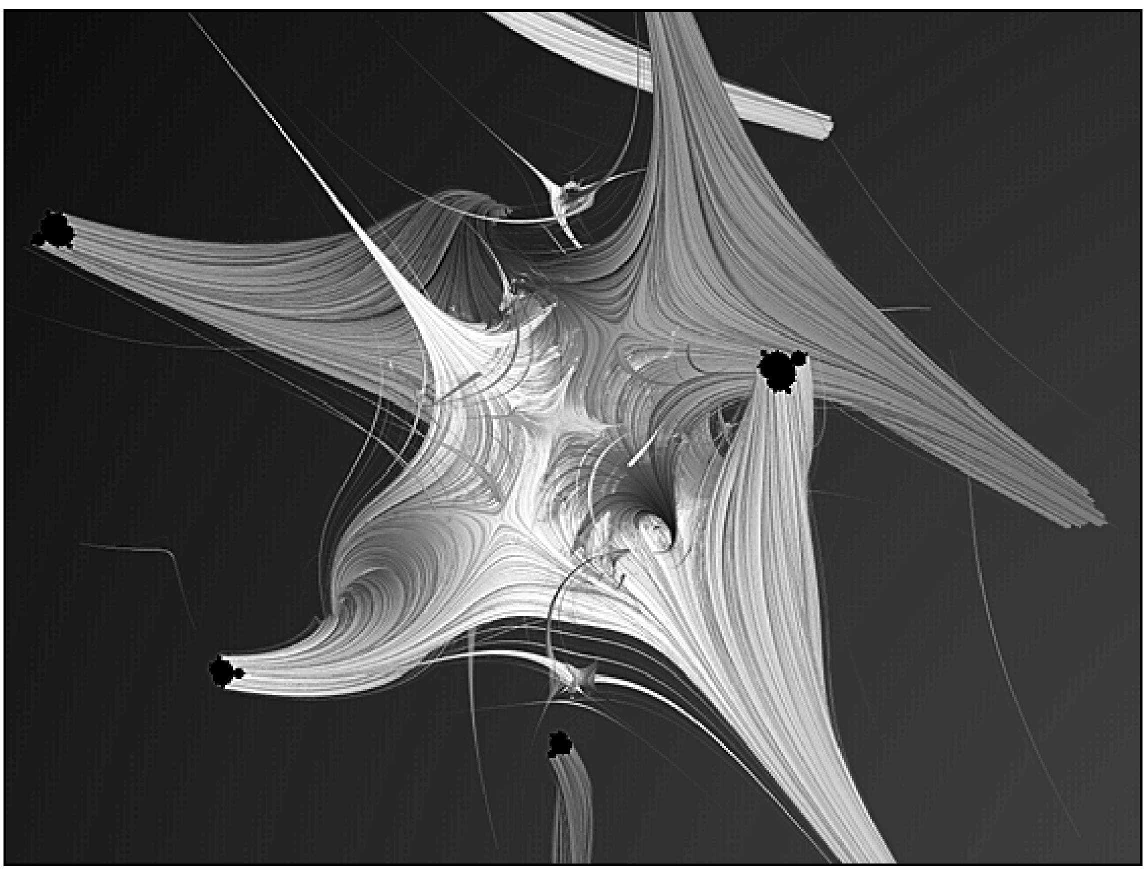
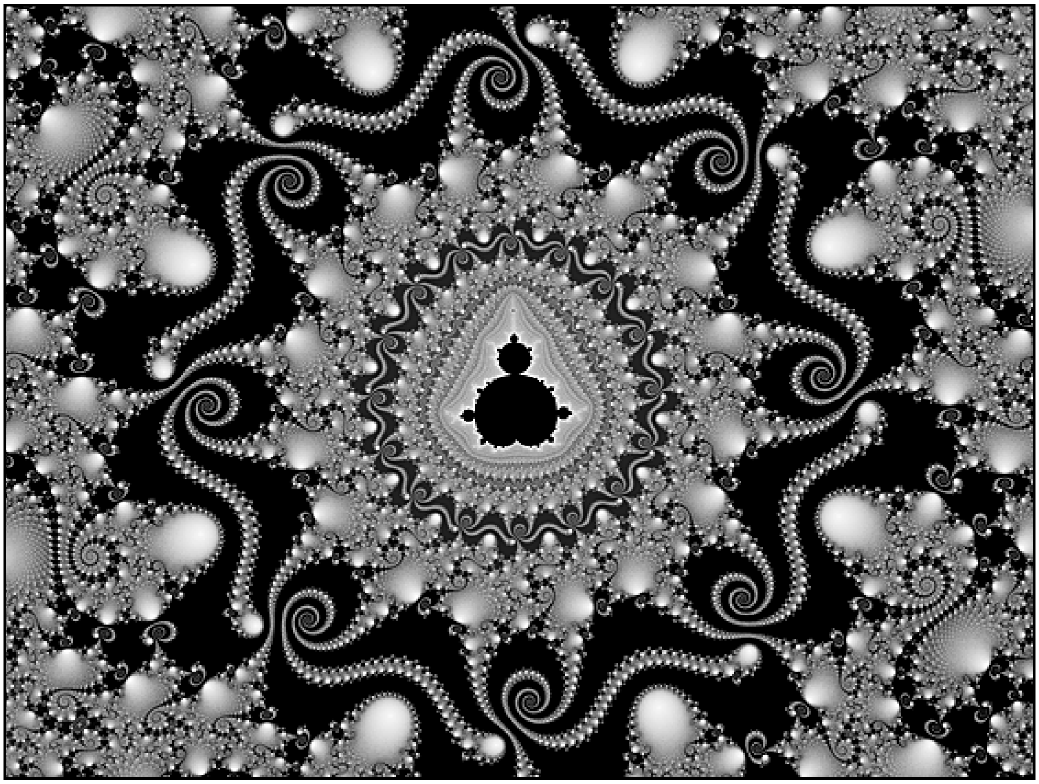


fig 11. ***Anfall från fjärde dimensionen.***



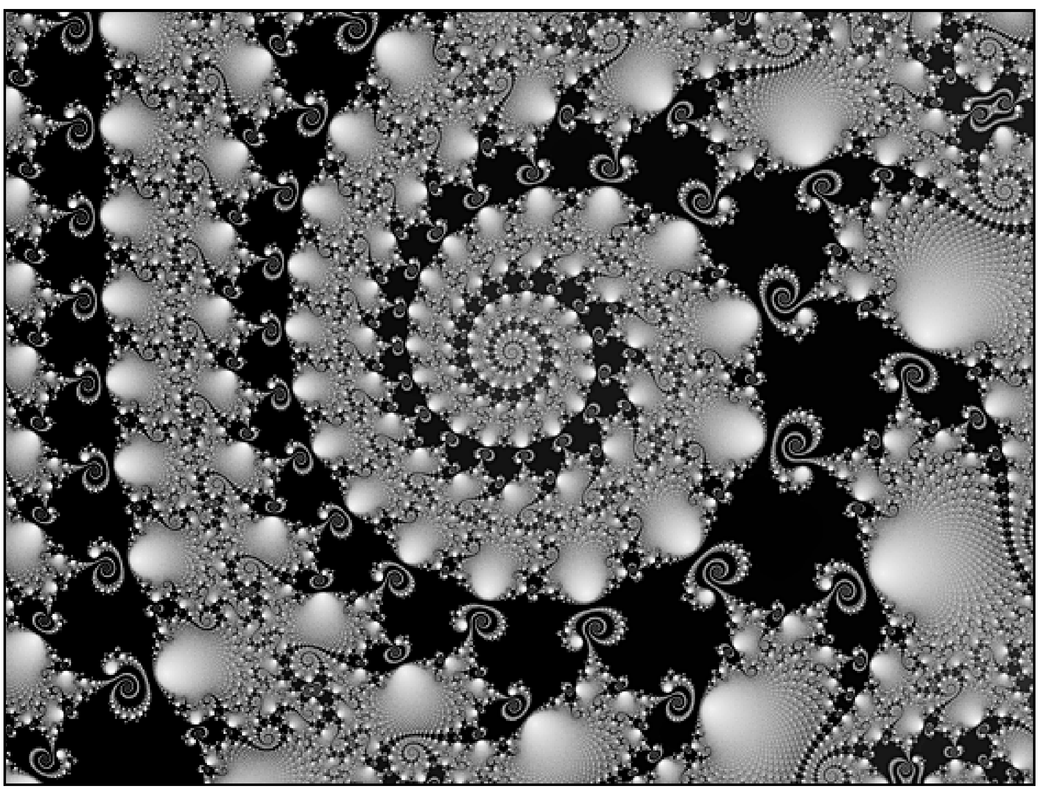


fig 12 & 13. Djupa förstoringar i mandelbrotfiguren. Spiralen belägen ca kl 8 i föregående bild).

6) Enkelhet och komplexitet

Mandelbrotfraktalen har sitt ursprung i den mest enkla icke-linjära funktion man över huvudtaget kan iterera, $z^2 + c$, d v s en variabel i kvadrat plus en konstant (parameter). Trots att gränsen till mandelbrotmängden är en oändligt invecklad fraktal, är ”receptet” för alstrandet av den mycket enkel. För dom som lär sig programmera är ett enkelt mandelbrotprogram ren nybörjarprogrammering. Komplexiteten hos resultatet har alltså inget samband med hur komplicerad receptet eller algoritmen är. Folk som kan programmera säger att algoritmen för mandelbrotmängden kräver färre programrader än algoritmen för den oändligt mycket enklare Koch snöflinga, behandlad först i denna artikel. Detta skulle kunna sammanfattas med följande:

1) Algoritmen (receptet) för att generera mandelbrotmängden och detaljer av denna är mycket enkel (z -> z^2 + c, där z = 0 i utgångsläget, "c” varierar med bildpunkterna).

2) Beräkningarna för att ta fram en bild av densamma är dock så omfattande att, i praktiken endast en dator kan göra det. För varje bildpunkt på skärmen måste beräkningsloopen snurra kanske upp emot ett antal tusen gånger. Det gör miljoner eller kanske miljarder multiplikationer med långa decimaltal för en förhoppningsfullt vacker fraktalbild.

3) Förklaringen till att krusidullerna i dom på enkla grunder empiriskt framräknade bilderna ser ut som dom gör är dock en fråga för elitmatematikerna. Jag har för mig (när det gäller mandelbrotmängden) att det på deras rotvälska lyder något i stil med ”bla bla bla bla fundamentalgruppen av ensidigt tvåskift bla bla bla”.

4) ”Tvåskift” är nära knutet till den matematiska leken: *Jag är ett bråk mellan 0 och 1, dubbla mig gång på gång, men blir jag större än 1 dra ifrån 1 (t ex 1/6 -> 2/6 = 1/3 -> 2/3 -> 4/3 – 1 = 4/3 – 3/3 = 1/3 etc).* Man kan se bråken som delar av ett helt varv och leken som vinkelfördubblingar. I vidstående exempel får vi alltså orbiten: *1/6 -> 1/3 -> 2/3 -> 1/3 -> 2/3 etc.* När man roterat till 4/3 varv är man i själva verket tillbaka till 1/3 varv, man har sugits in i en 2-periodisk cykel. Ärade läsare kan själva se vad som händer om man kör denna lek med andra bråk mellan 0 och 1. Prova t ex 1/7 eller 3/7!

M a o ur yttersta enkelhet växer via ändlösa beräkningar oändlig komplexitet fram, vars förklaringar på mycket hög nivå återigen snubblar över yttersta enkelhet.

Eftersom fler och fler former dyker upp i all oändlighet, måste det innebära att vi till slut har att göra med mönster som överträffar varje jordisk struktur inklusive den mänskliga hjärnan. Man har t o m på skämt ställts sig frågan om mandelbrotmängden innehåller intelligent liv!!! Frågan är inte fullt så vrickad som den först kan tyckas. Kanske är det en dold fraktal ordning som gör att en cell kan innehålla all information om en människa? Strukturen framträder mer och mer efterhand som den iterativa processen, i detta fall celldelningen, fortsätter.

Avslutning

Att med hjälp av datorprogram på egen hand utforska fraktalernas värld är inte så svårt och förutsätter inga kunskaper om matematiken bakom, även om det givetvis ger en extra dimension åt utforskandet. Det finns en mängd program att ladda hem för alla datormiljöer. Många program är också gratis. Dom som inte är det kostar ett par hundralappar. Många finns att ladda hem på:

http://home.att.net/~Paul.N.Lee/Fractal_Software.html

För dom som inte är rädda att gnugga geniknölarna skrev jag för drygt tio år sedan ett ca 40-sidigt kompendium Vägen till mandelbrotmängden, Introduktion till matematiken bakom Julia- och mandelbrot-fraktalerna för folk med grundskolekompetens i matematik. Innehåller ett 30-tal illustrationer. Alla krångliga termer förklaras efter hand som dom kommer upp. Dubbelsidigt kopierat och snyggt häftat. Pris 60:-. Avsnittet om monsterfigurer är hämtat från första kapitlet. För frågor och synpunkter och vid intresse för mina bilder (ramad tavla kostar under hundralappen inkl dokumentation), hör av er till mig. Mina bilder finns på nedanstående webadress

Med vänlig hälsning

Ingvar Kullberg
Snickaregatan 1B
264 70 Klippan
Tel 0435 - 224 83
ik@klippan.seths.se
klippan.seths.se/ik/ik