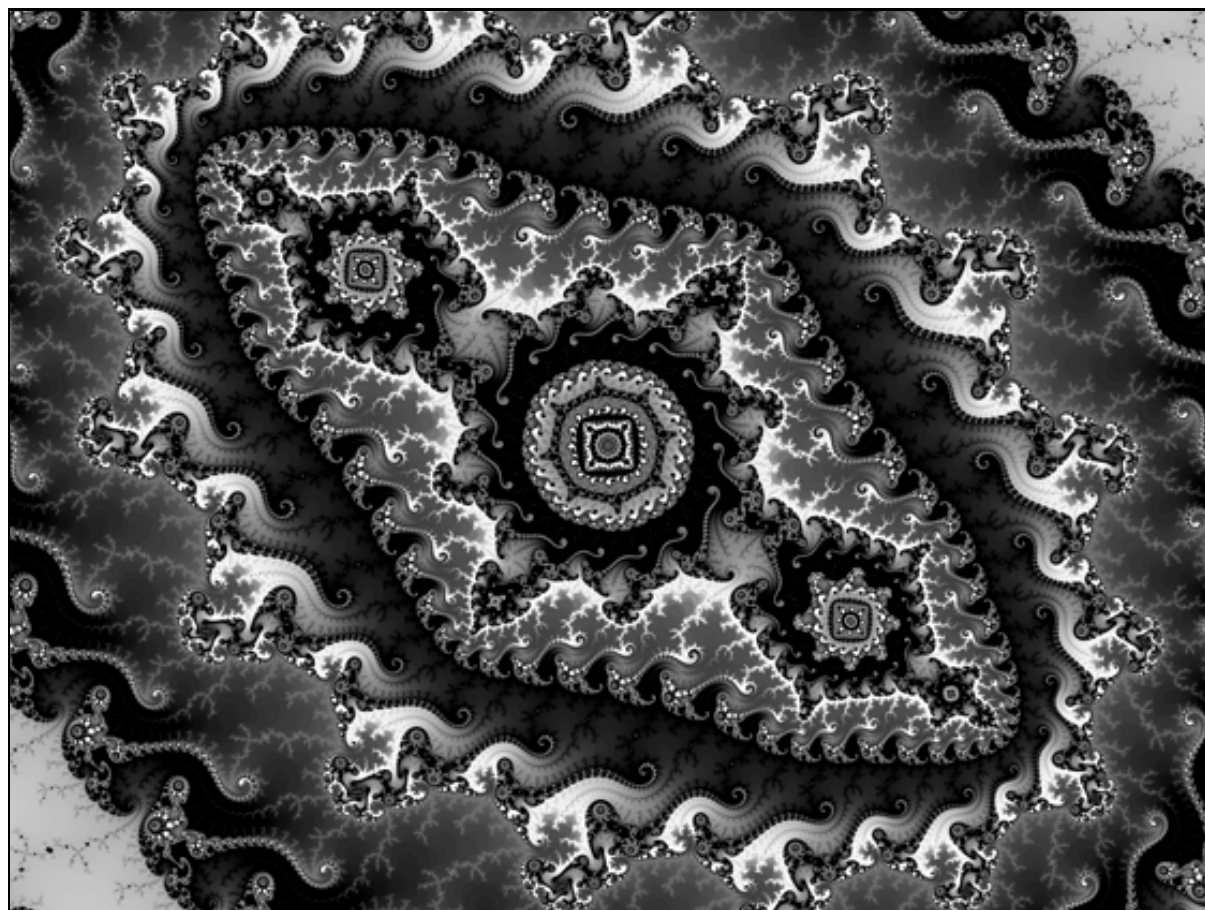


**Kort om mandelbrotfiguren i
anslutning till bilden**
Blomkålsfort



Illustrerat kompendium
till bild

av

Ingvar Kullberg © 2005

Kort om mandelbrotfiguren i anslutning till bilden *Blomkålsfort*

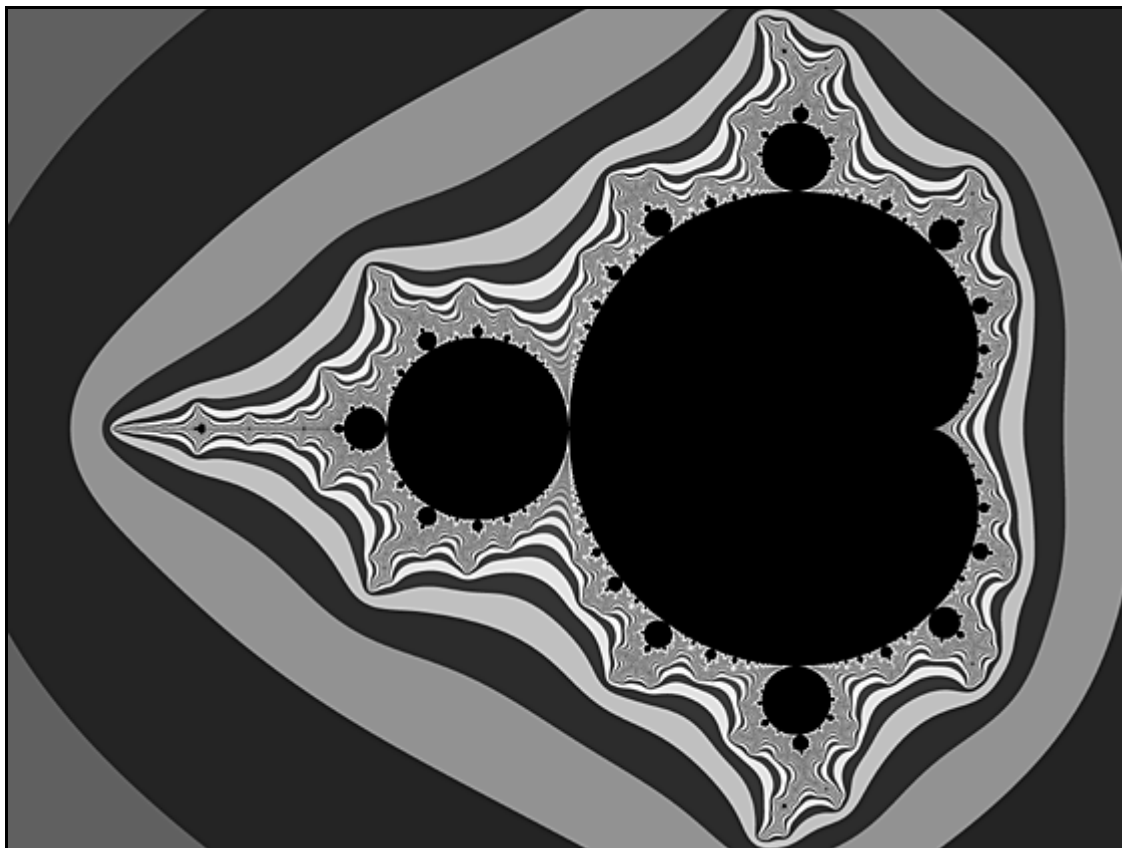


fig 1. Mandelbrotmängden omgiven av s k nivåmängder.

Mandelbrotfiguren eller mandelbrotmängden, figur 1, uppkallad efter den polsk-judiske matematikern Benoit B Mandelbrot, brukar man lite förenklat kalla den mest komplicerade *fraktal*-figur matematiken känner. Den huserar på det komplexa talplanet och blir synlig med hjälp av ett datorprogram som räknar fram den enligt en enkel matematisk regel. Färgerna runt omkring figuren, i bilden ovan visade som alternerande gråskala, visar den matematiska terrängen precis som höjdkurvorna på en karta runt en bergsplatå. Gränsen till mandelbrotmängden, d v s själva fraktalkurvan, är så sönderbruten att längden av denna är lika lång som till randen av ett oändligt universum. Mandelbrotmängden består av en hjärtformad kropp på vilken det sitter en oändlig hierarki runda skivor av olika storlek, på vilka det i sin tur sitter en oändlig hierarki mindre runda skivor, på vilka det i sin tur..... . Skivorna blir snabbt oändligt små, och där dessa slutar utgår grenverk. Den enda gren som är rak är antennen i den vänstra delen av figuren. Den punkt där antennen hänger ihop med resten av figuren kallas Feigenbaum-Myrbergs punkt och motsvarar den punkt i s k periodfördubblings-diagram där ordning övergår i kaos. Antennen och grenarna är oftast så tunna att man bara kan se dem med hjälp av de färgade banden som smiter åt figuren tätare och tätare. Zoomar man in för att se själva grenen, finner man här och var kopior av hela mandelbrotfiguren. Det är dessa minikopior av olika storlekar som konstituerar grenverket!!! Var och en av dessa minikopior befinner sig emellertid i en miljö av strukturer

fullständigt unik för den minikopian. Samtidigt finns hela den samlade mandelbrotmängdens fullhet av former i var och en av dessa minikopior. Således kan man säga att var och en av dessa oändligt många minikopior uttrycker den samlade mandelbrotmängdens oändliga fullhet av former på sitt individuella sätt.

Detta var ett tafatt försök att beskriva det som egentligen inte kan beskrivas. Matematiskt består mandelbrotmängden (oftast svart på färgbilder) av de punkter "c", på det komplexa talplanet där den komplexa variabeln "z", för processen $z \rightarrow z^2 + c$, inte går mot oändligheten då $z = 0$ är startvärde. Färgerna runt omkring anger efter hur många iterationer för ett visst "c", den komplexa variabeln "z" växt utanför en radie på minst 2 (i fig 1 & 30 har jag använt radien 10, i övriga bilder radien 2). Om "z" någonsin når utanför en radie av 2, kommer "z" att växa snabbare och snabbare i all evighet och motsvarande "c" tillhör alltså inte mandelbrotmängden.

Här nedan följer en zoomsekvens på 28 bilder. Första bilden visar mandelbrotmängden i sin helhet. Sista bilden är DIN BILD. I varje bild (utom den sista) har jag efter bästa förmåga ritat in en vit, eller eller i något fall en svart, fyrkant som anger var nästa bild är inzoomad.

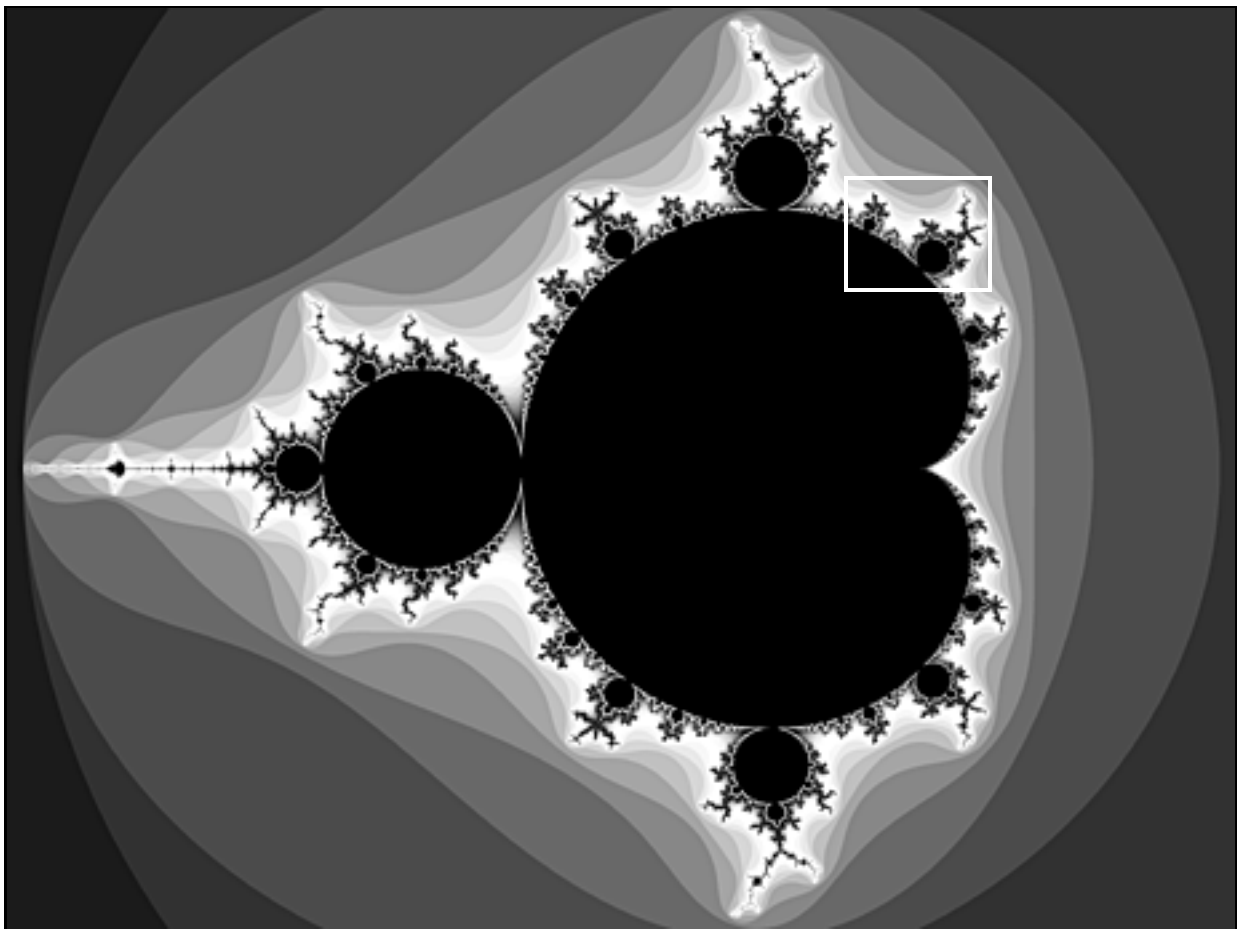


fig 2.

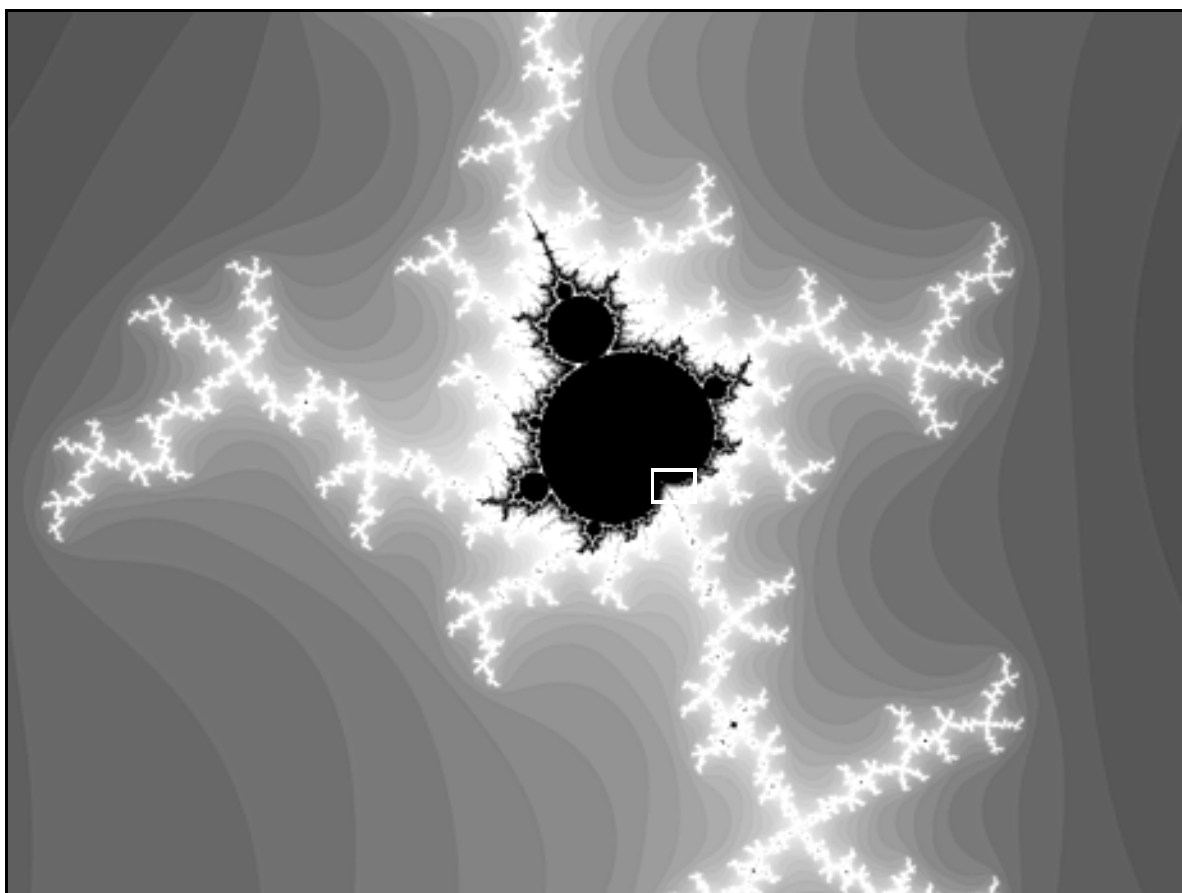
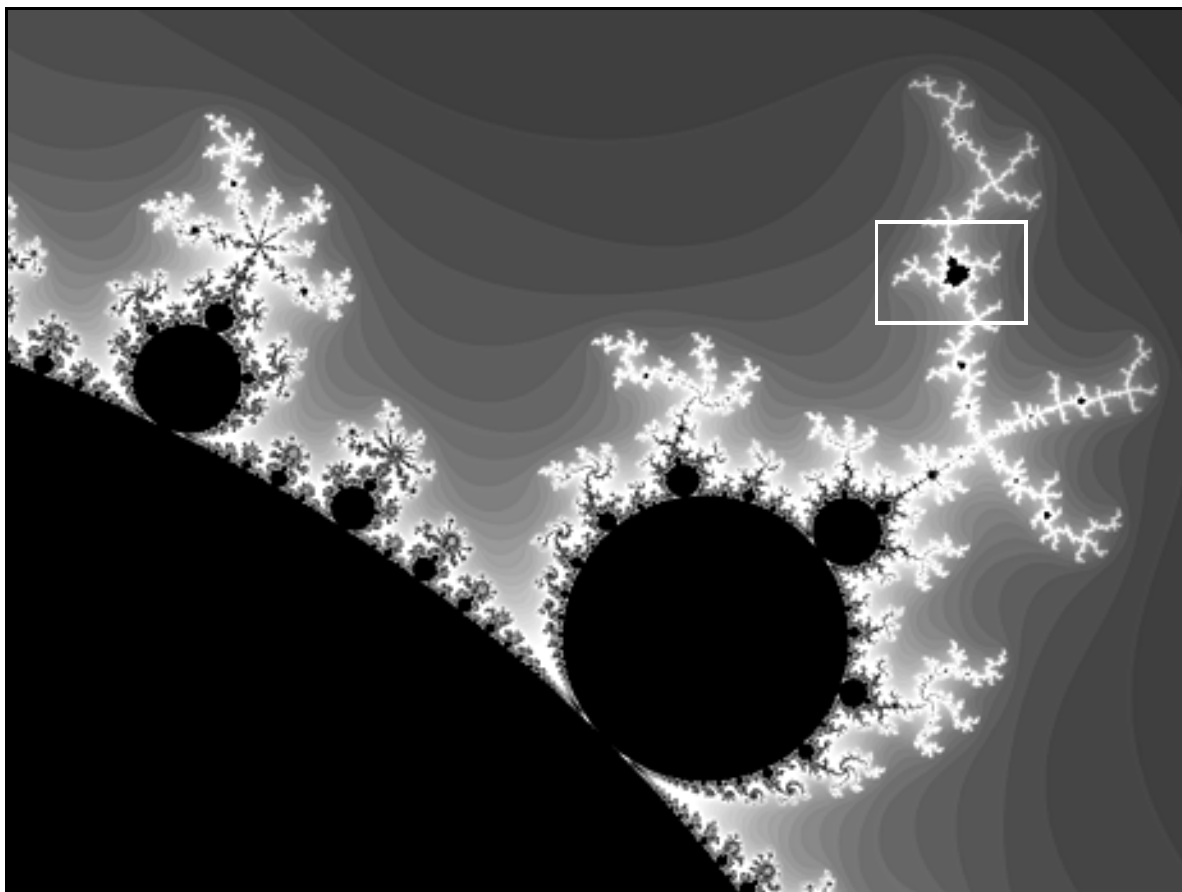


fig 3 (ovan).
fig 4 (nedan).

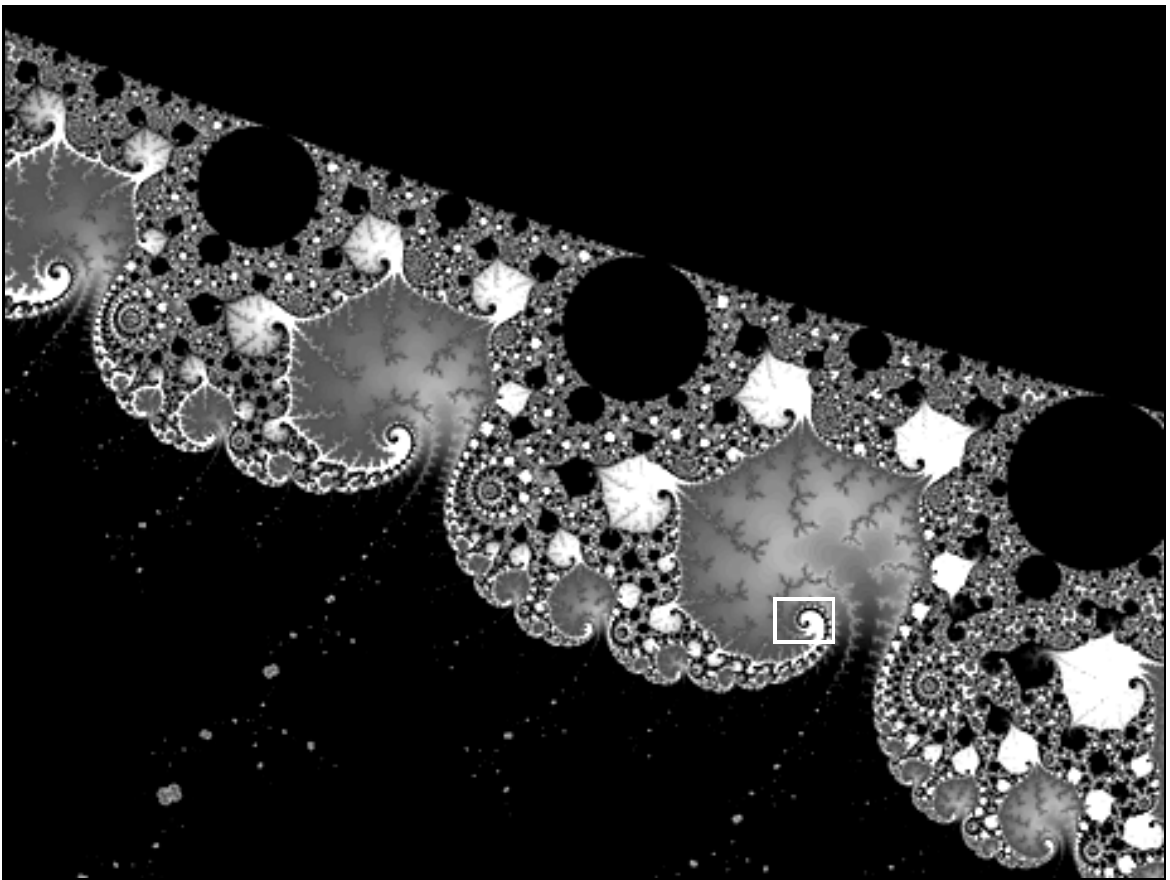
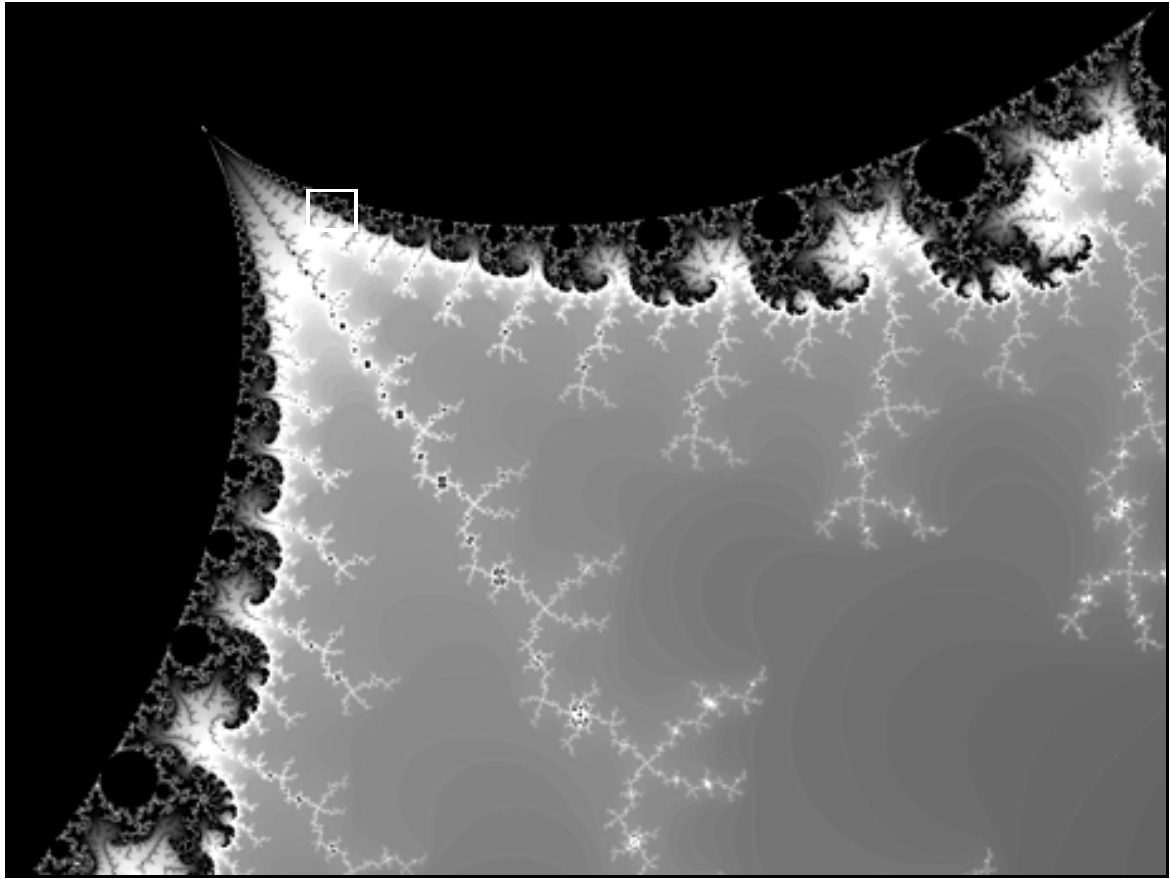


fig 5 (ovan).
fig 6 (nedan).

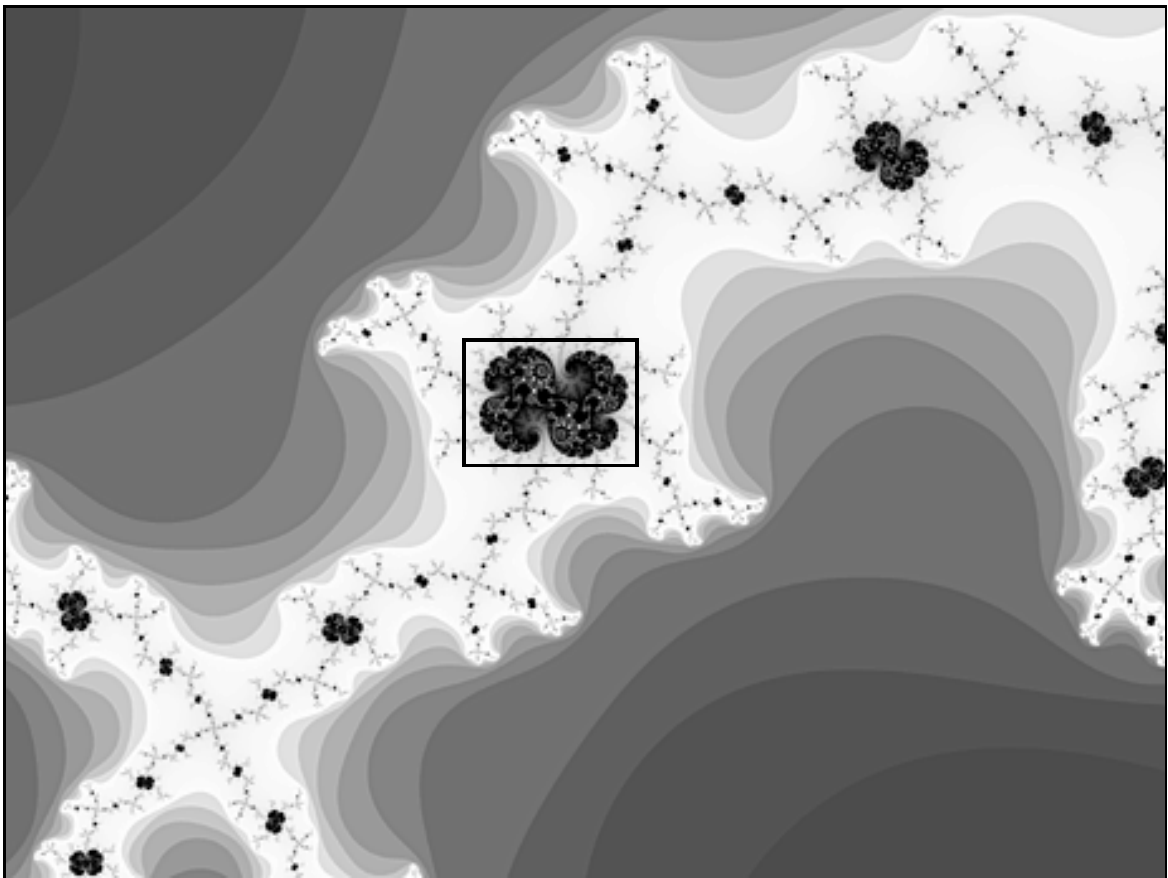
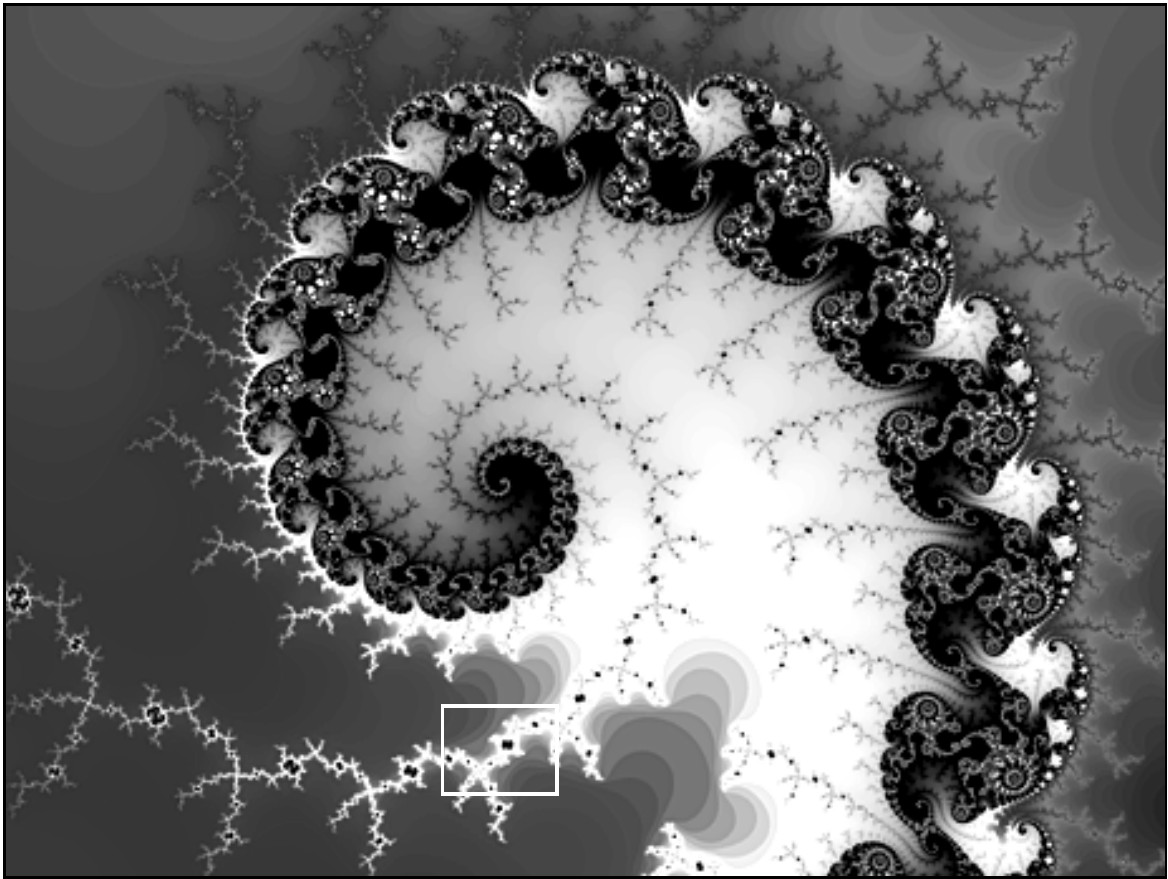


fig 7 (ovan).
fig 8 (nedan).

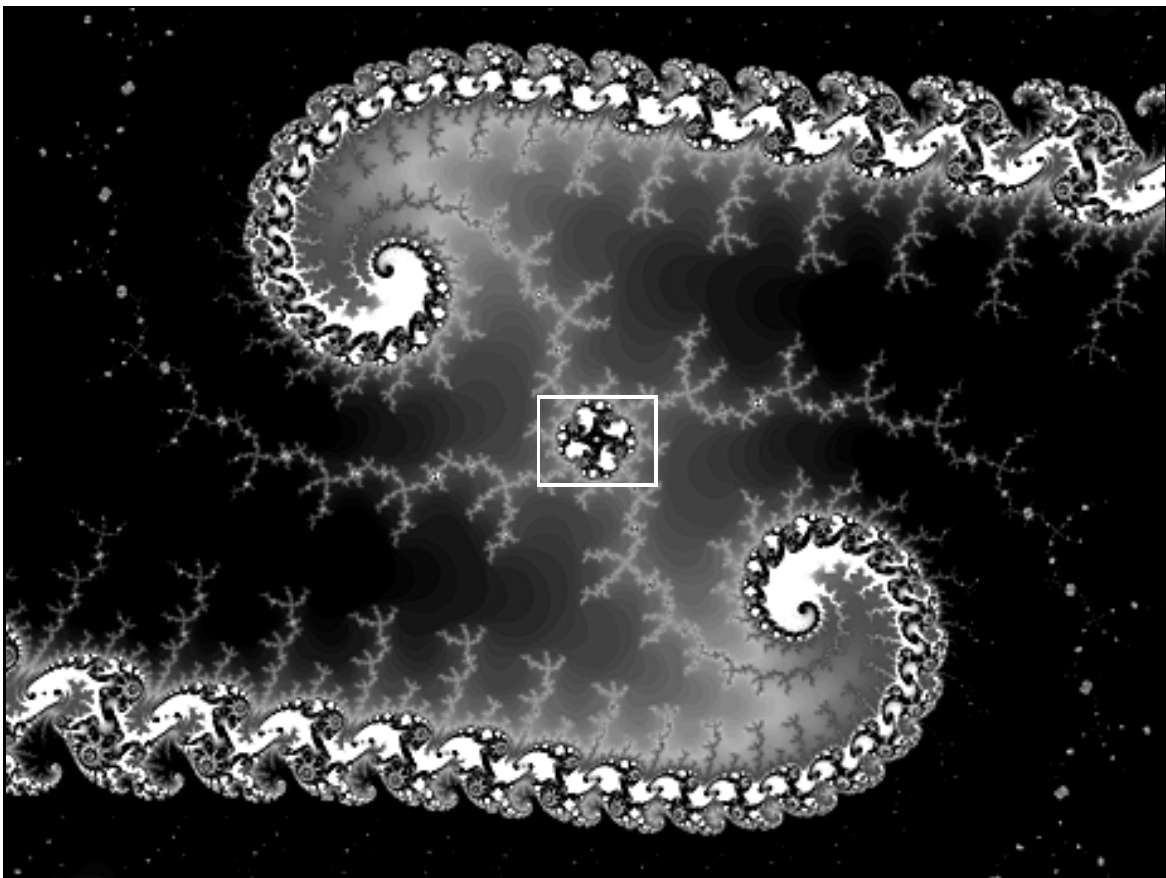
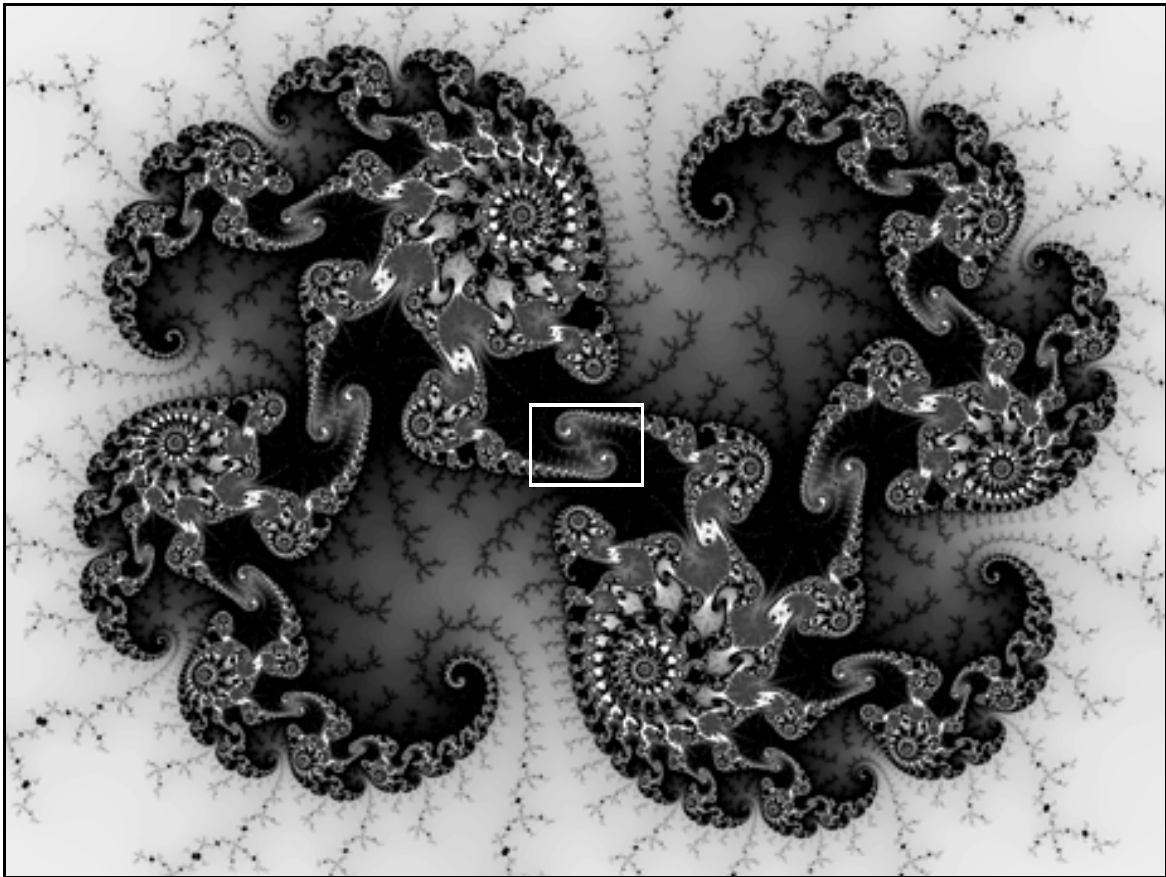


fig 9 (ovan).
fig 10 (nedan).

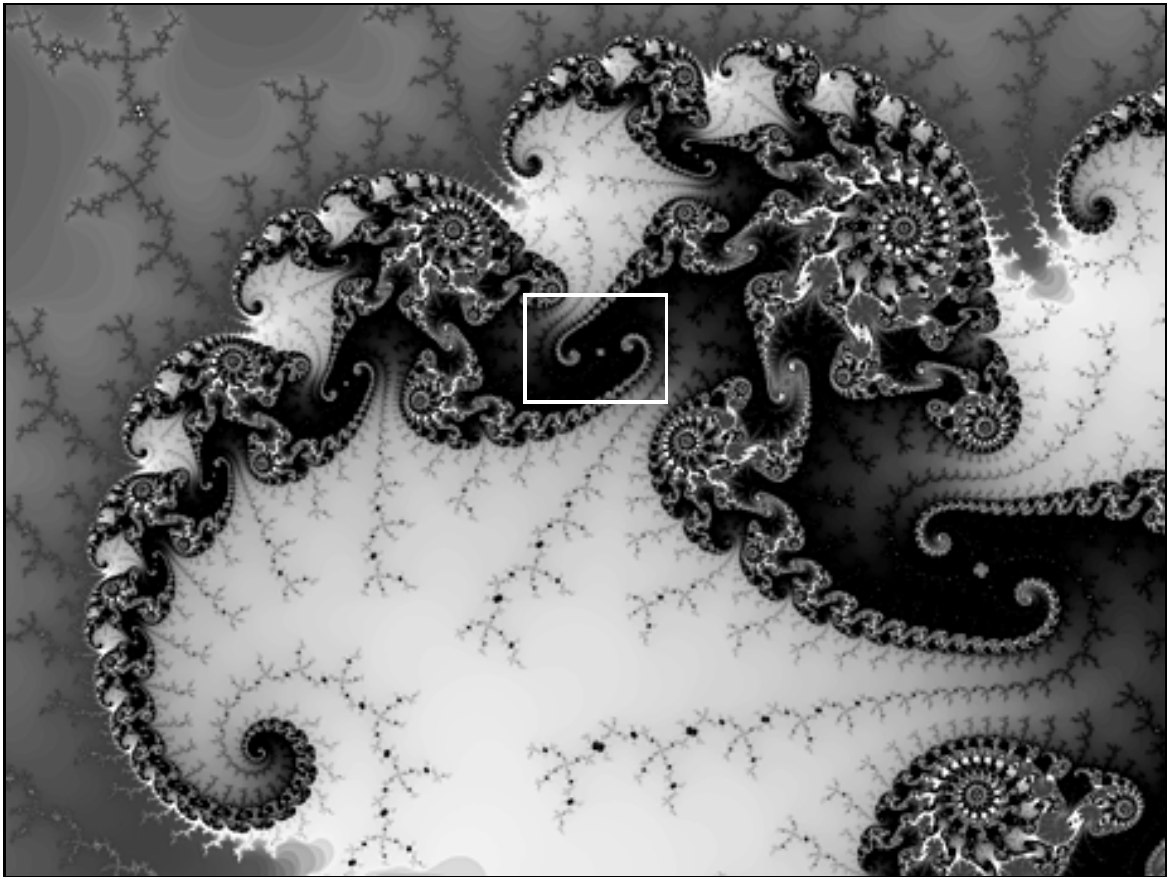
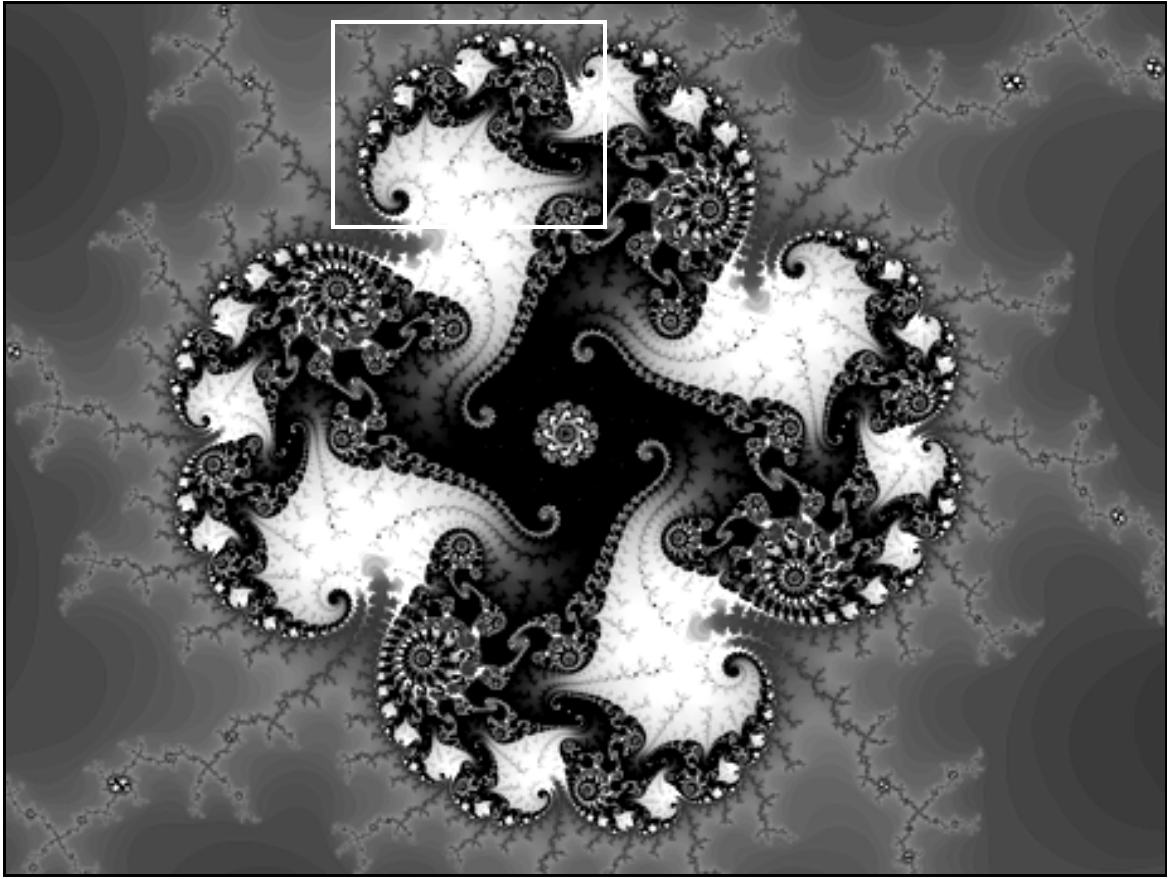


fig 11 (ovan).
fig 12nedan).

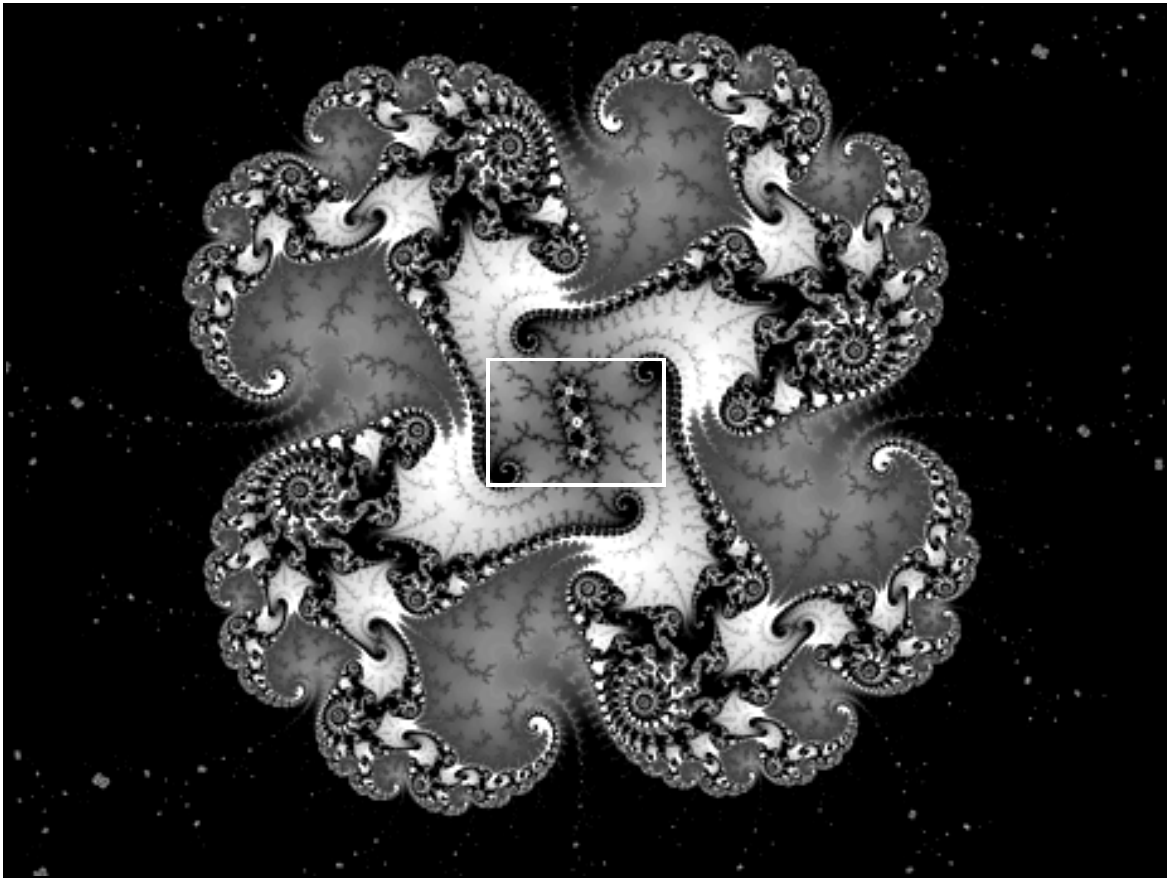
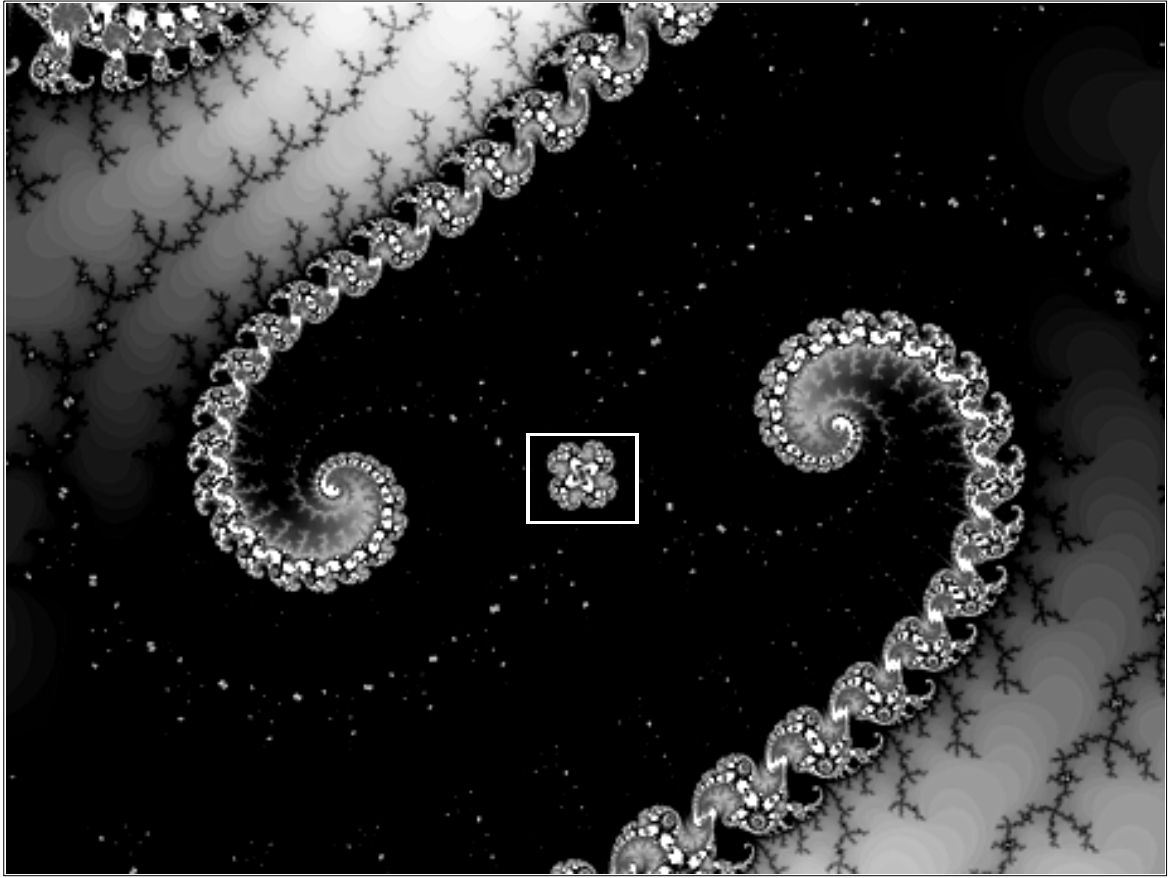


fig 13 (ovan).
fig 14 (nedan).

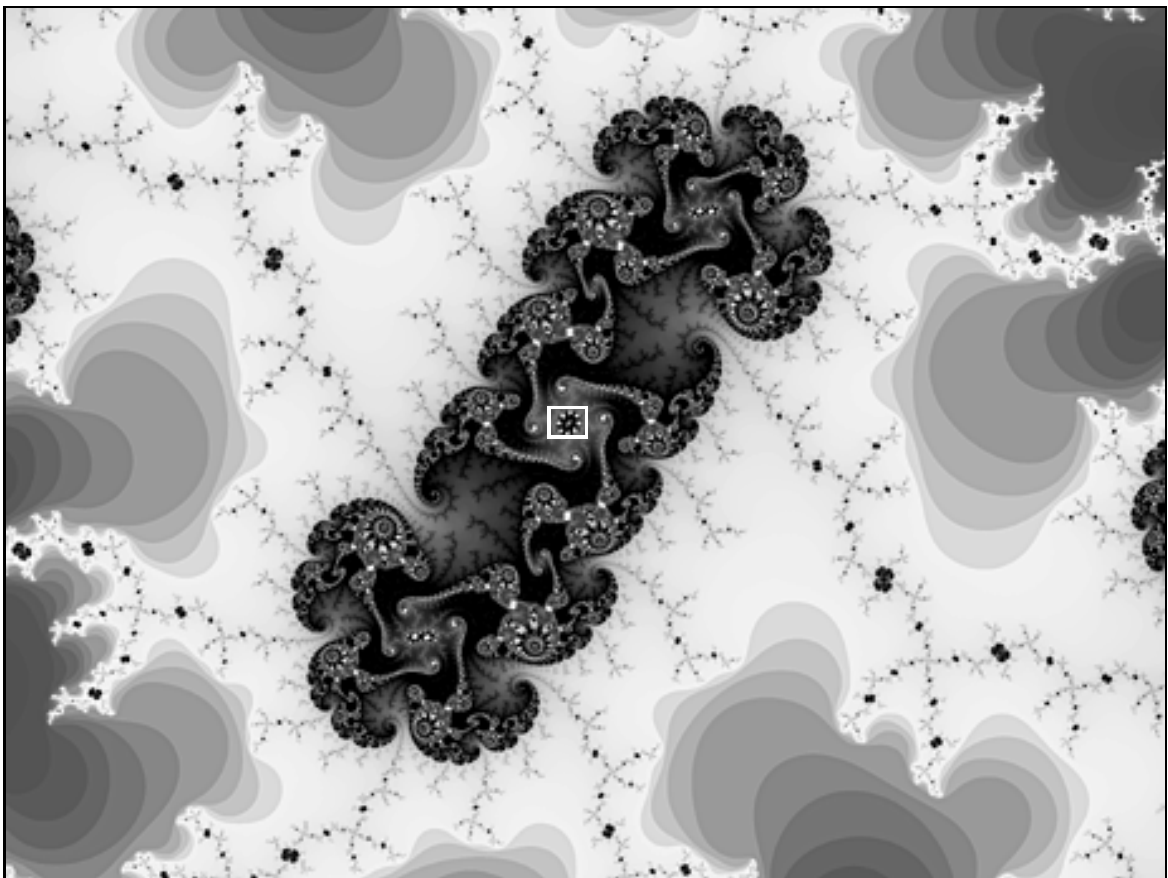
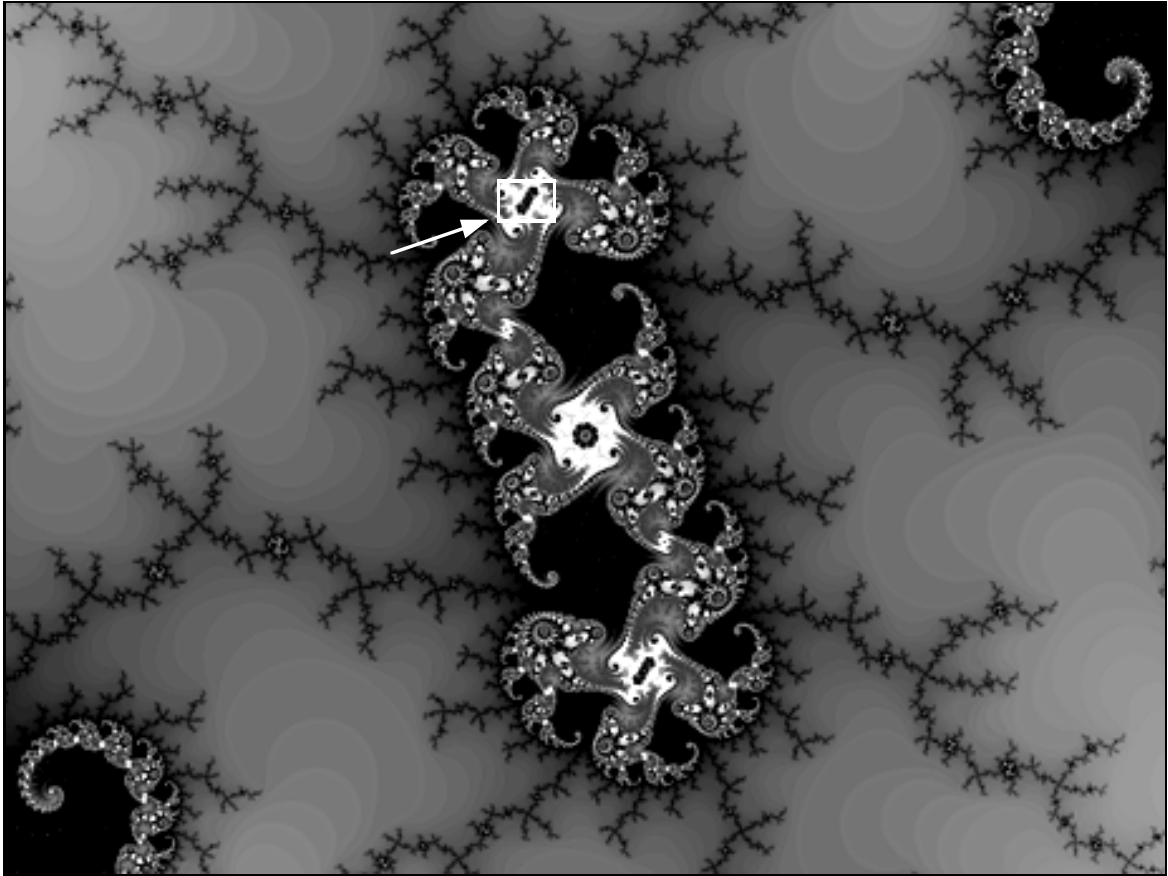


fig 15 (ovan).
fig 16 (nedan).

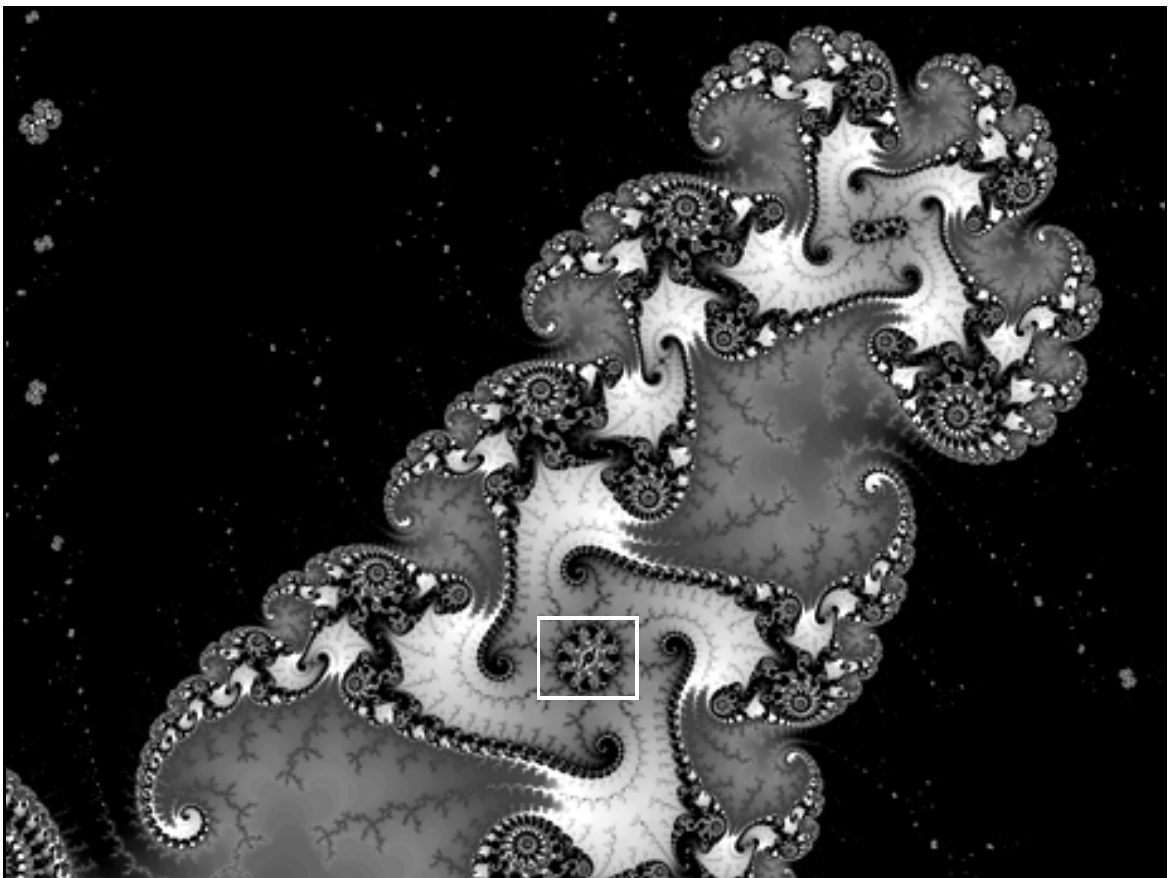
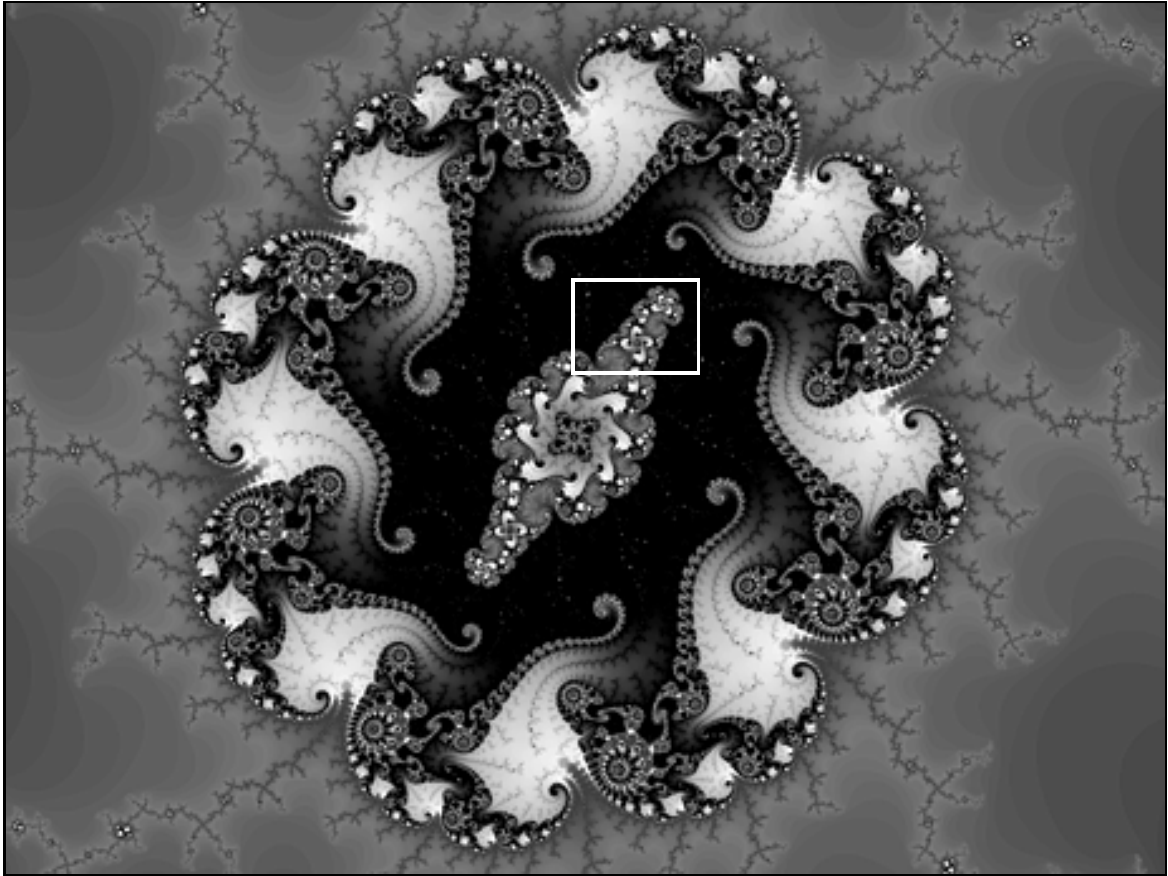


fig 17 (ovan).
fig 18 (nedan).

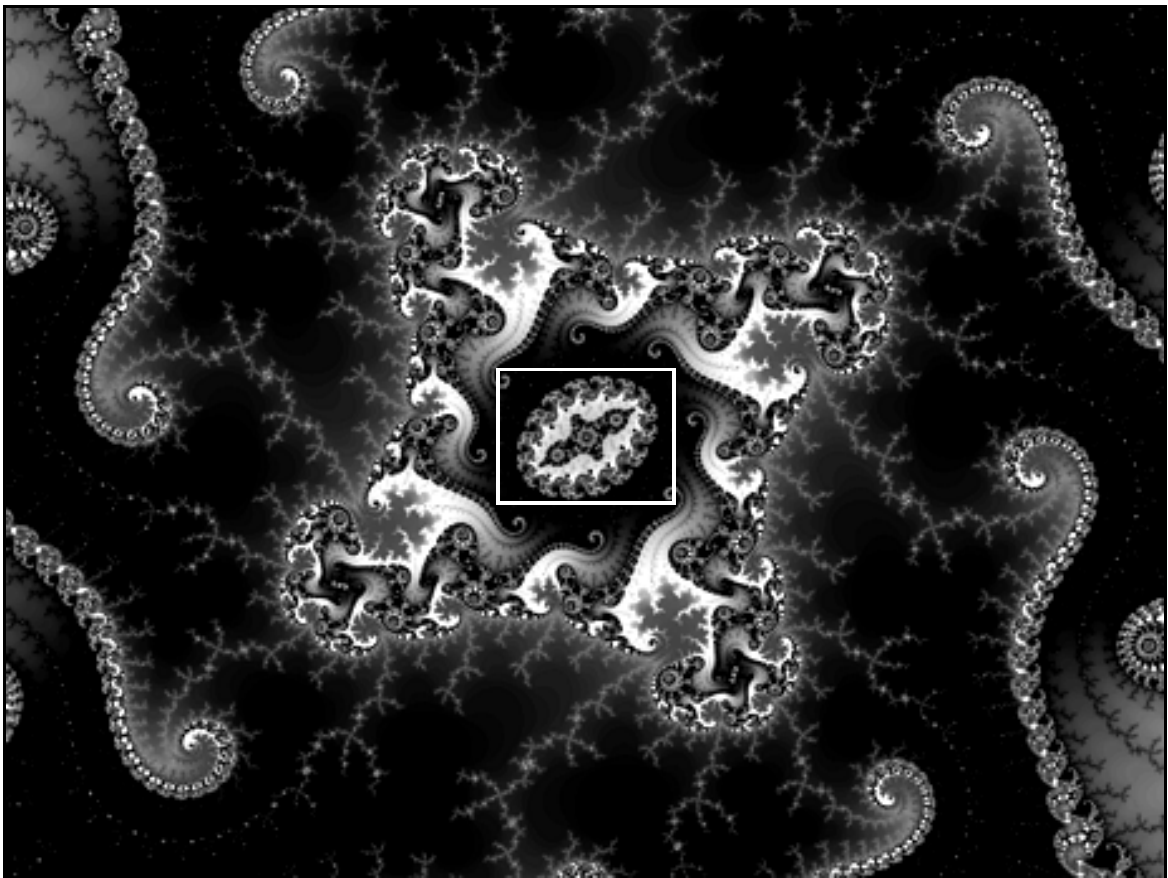
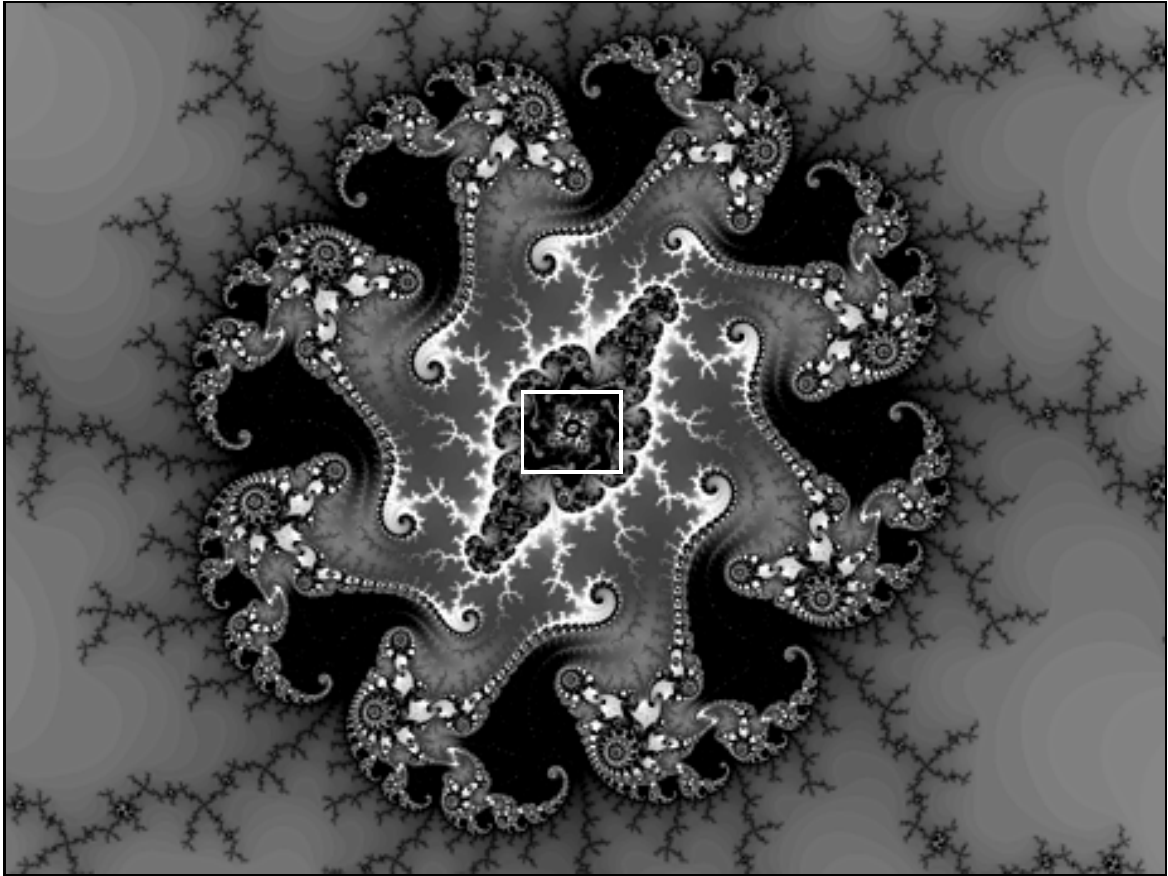


fig 19 (ovan).
fig 20 (nedan).

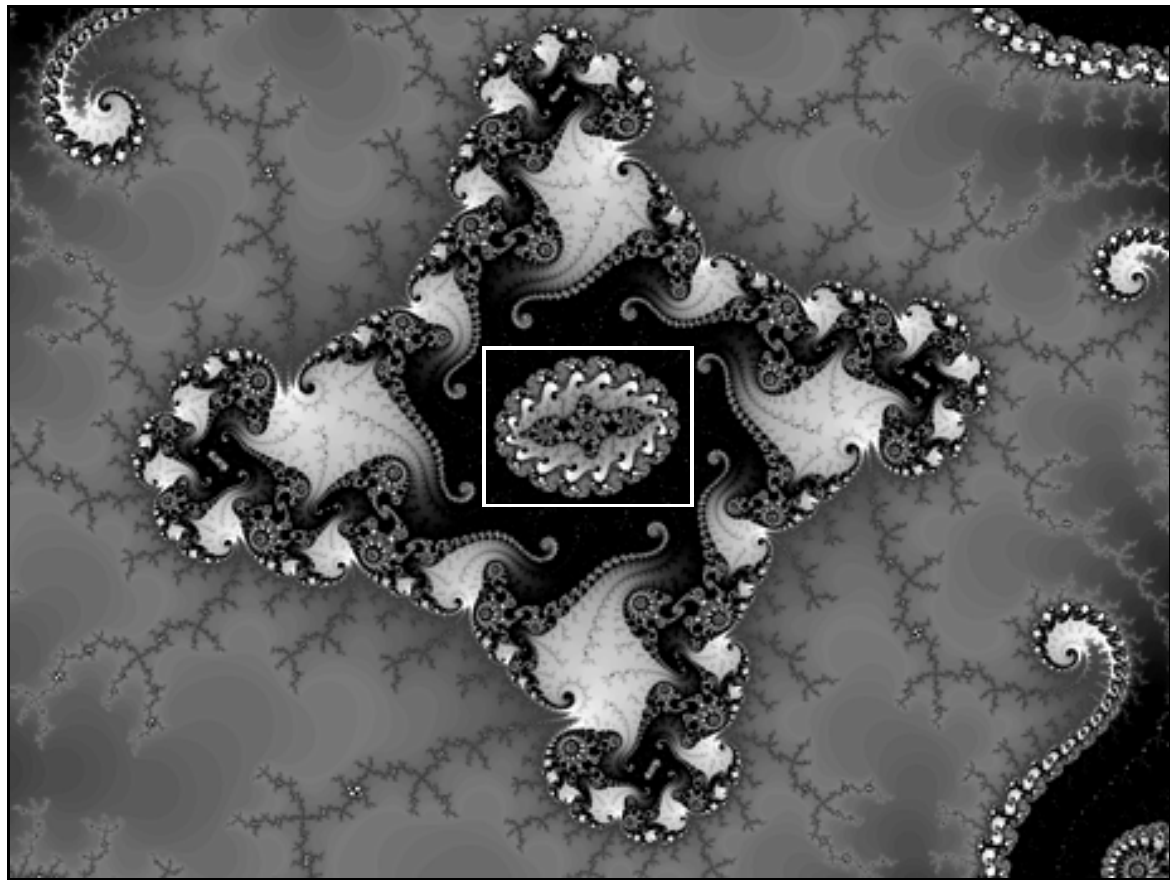
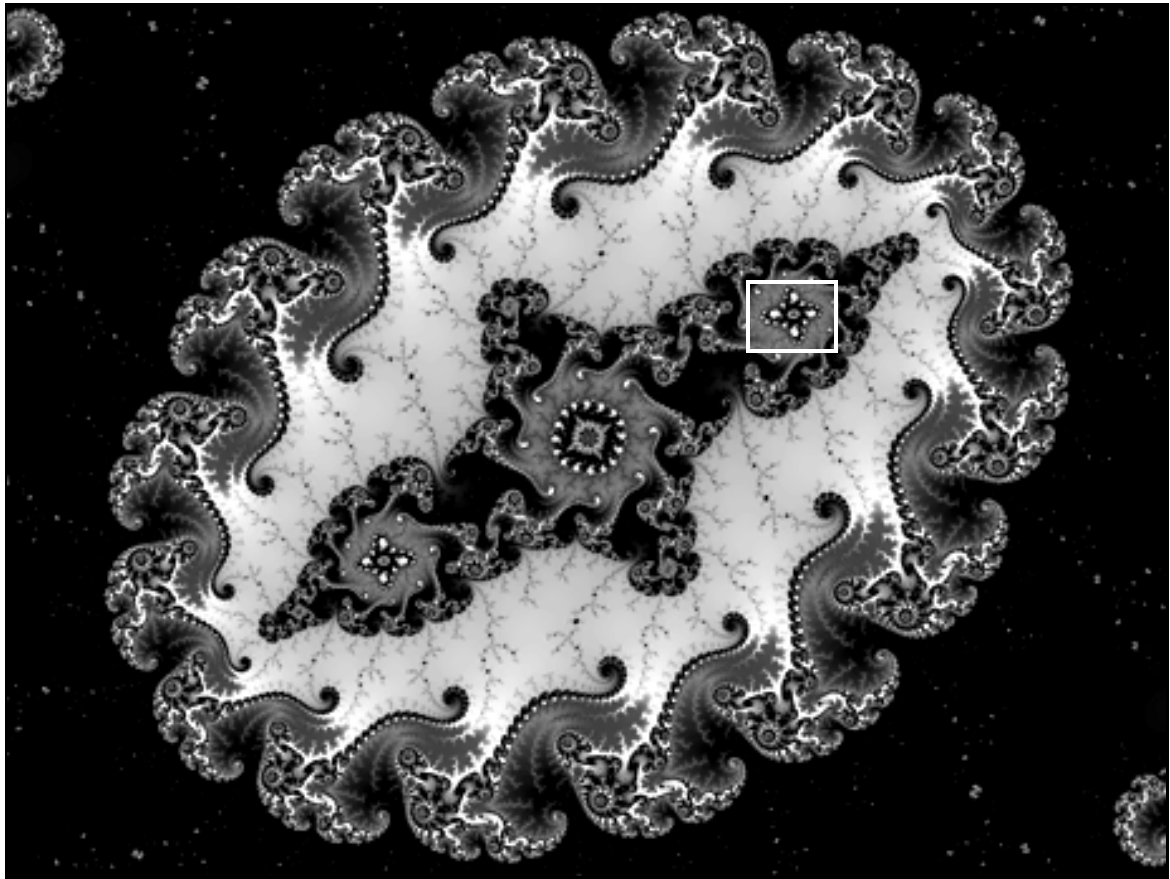


fig 21 (ovan).
fig 22 (nedan).

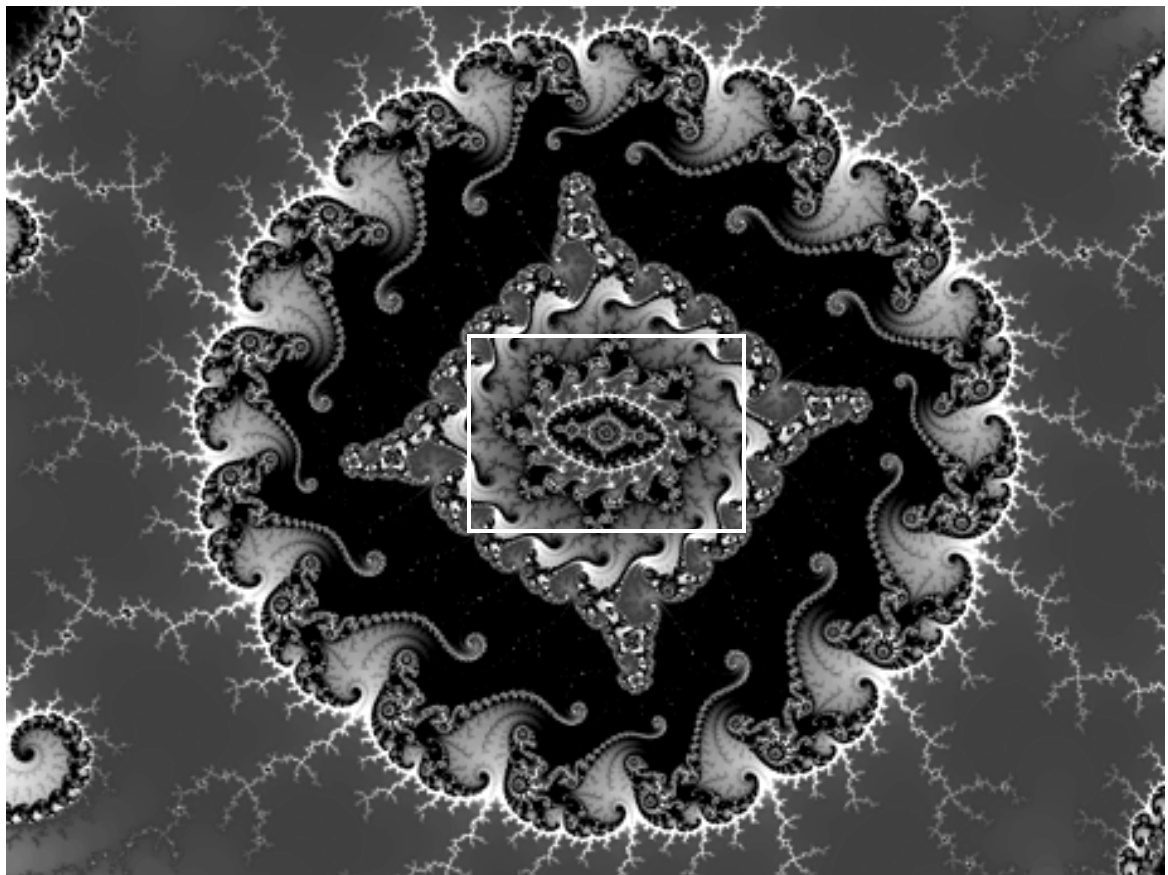
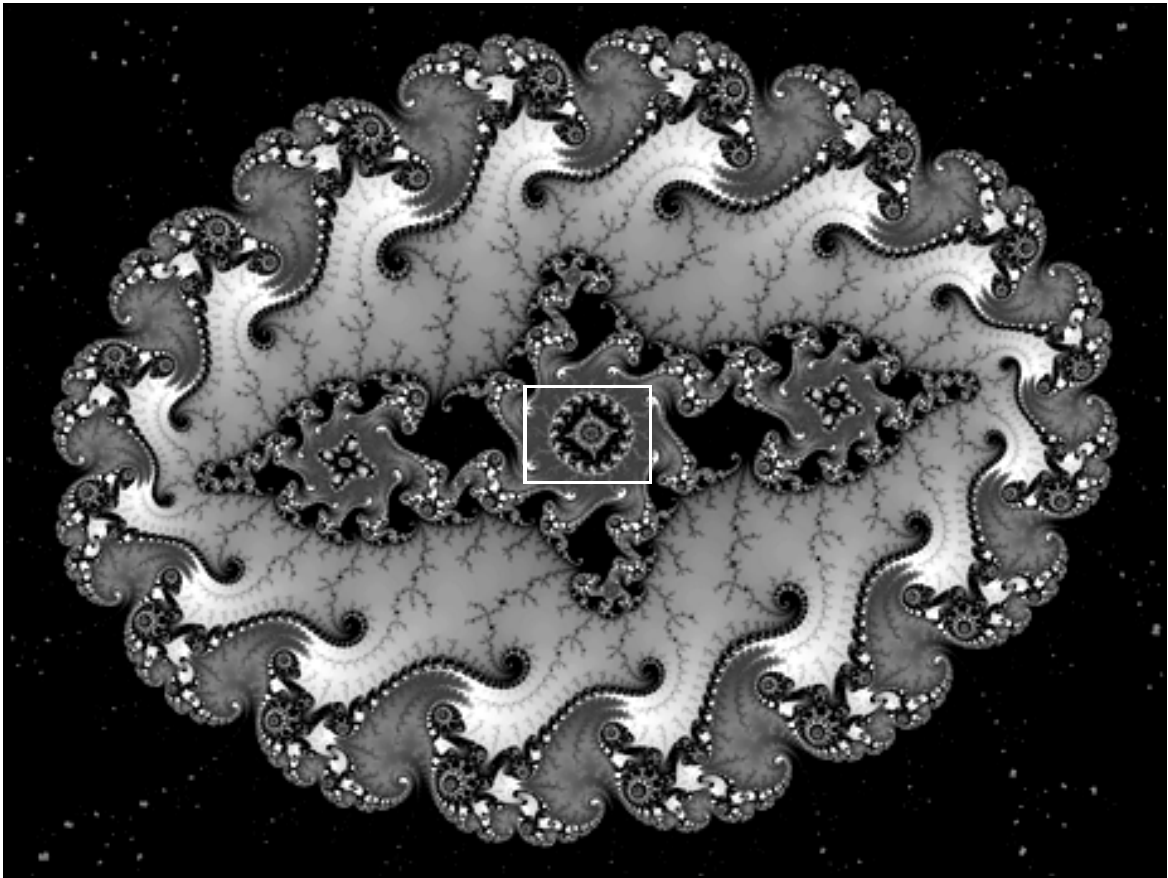


fig 23 (ovan).
fig 24 (nedan).

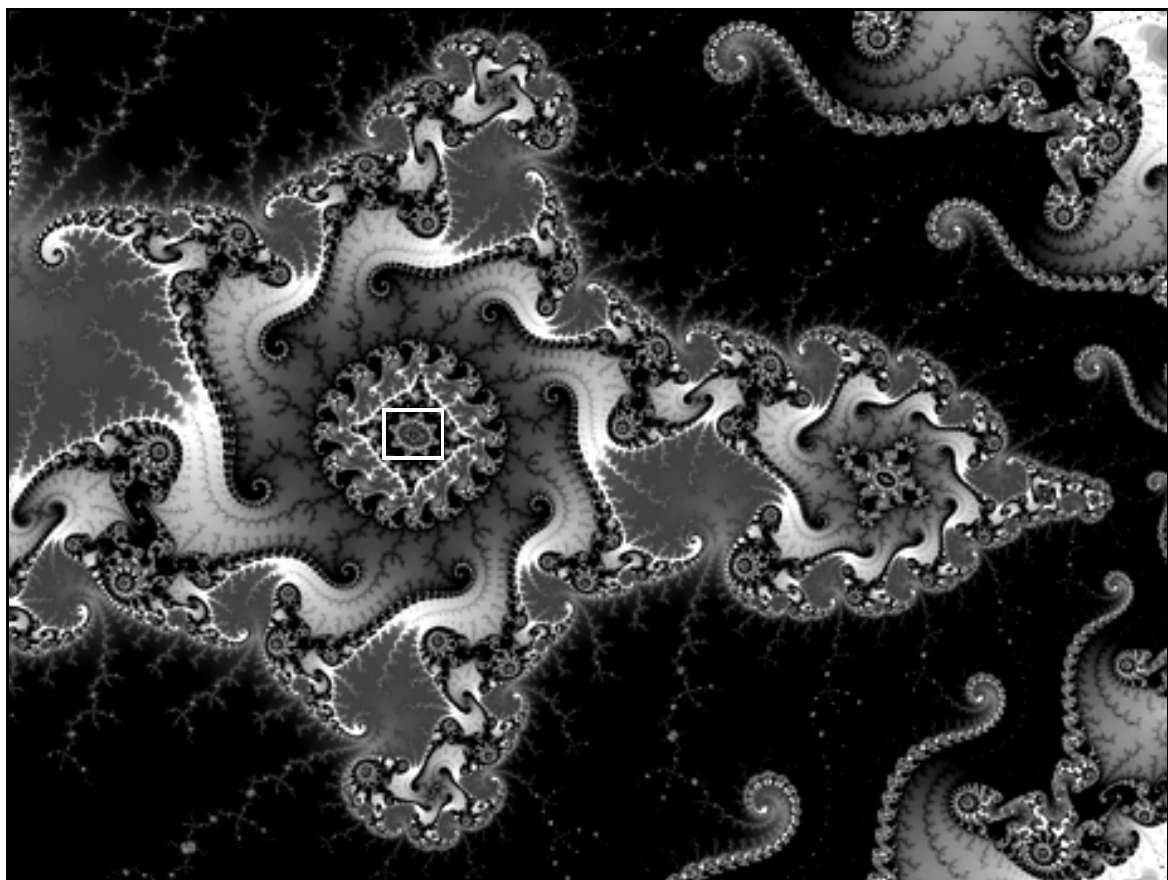
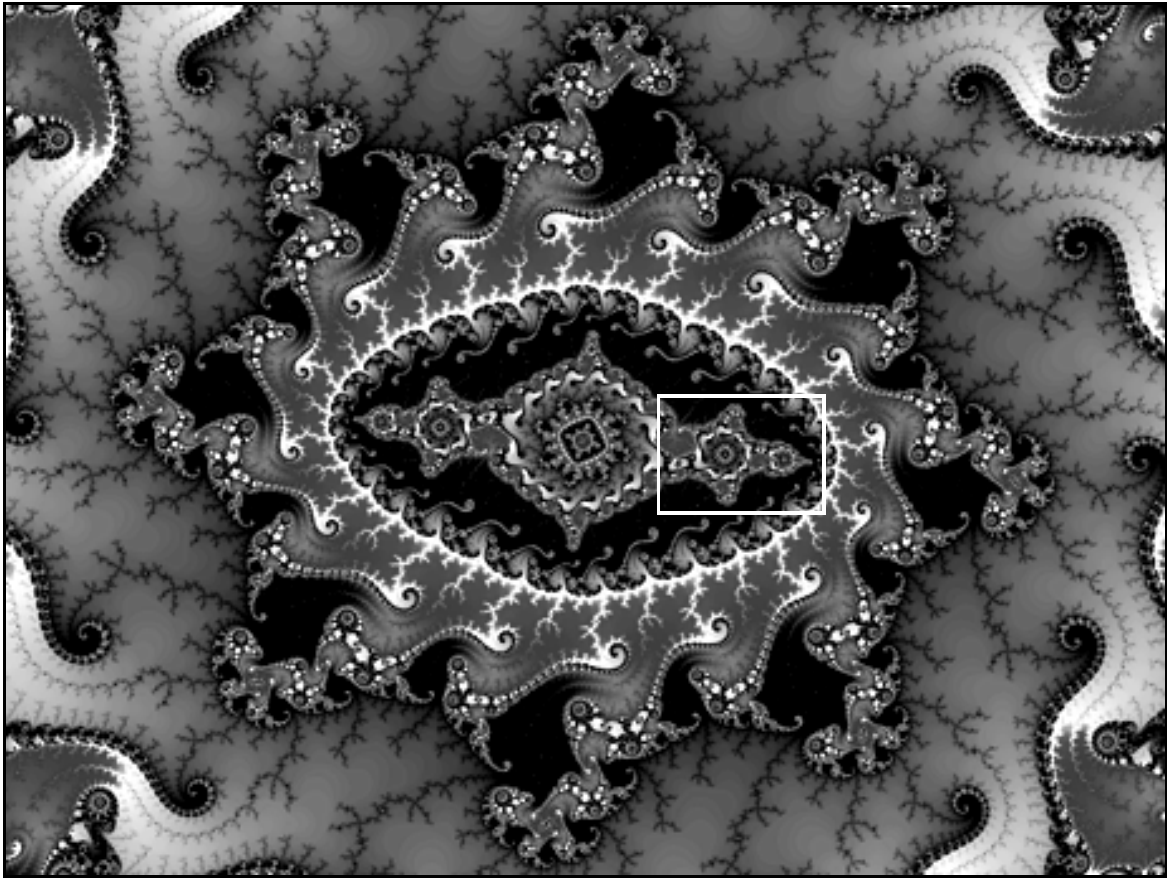


fig 25 (ovan).
fig 26 (nedan).

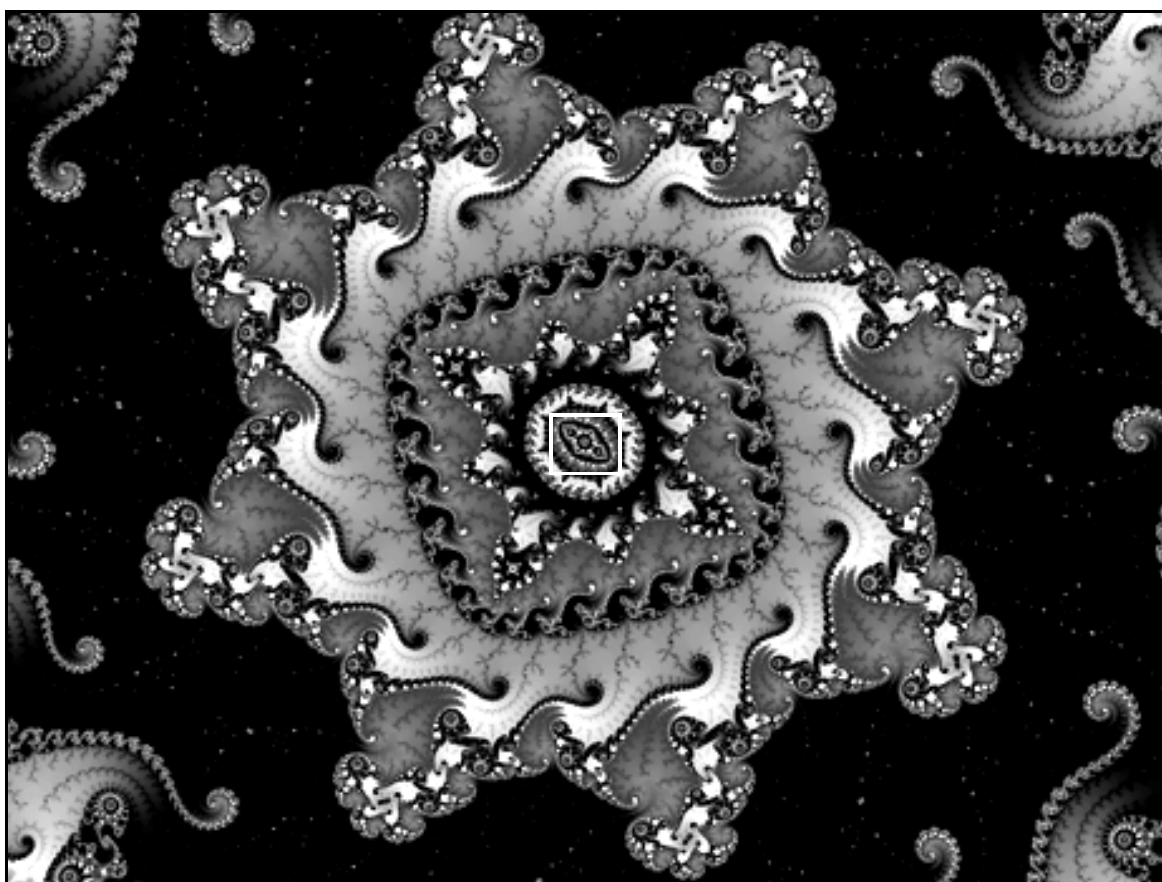
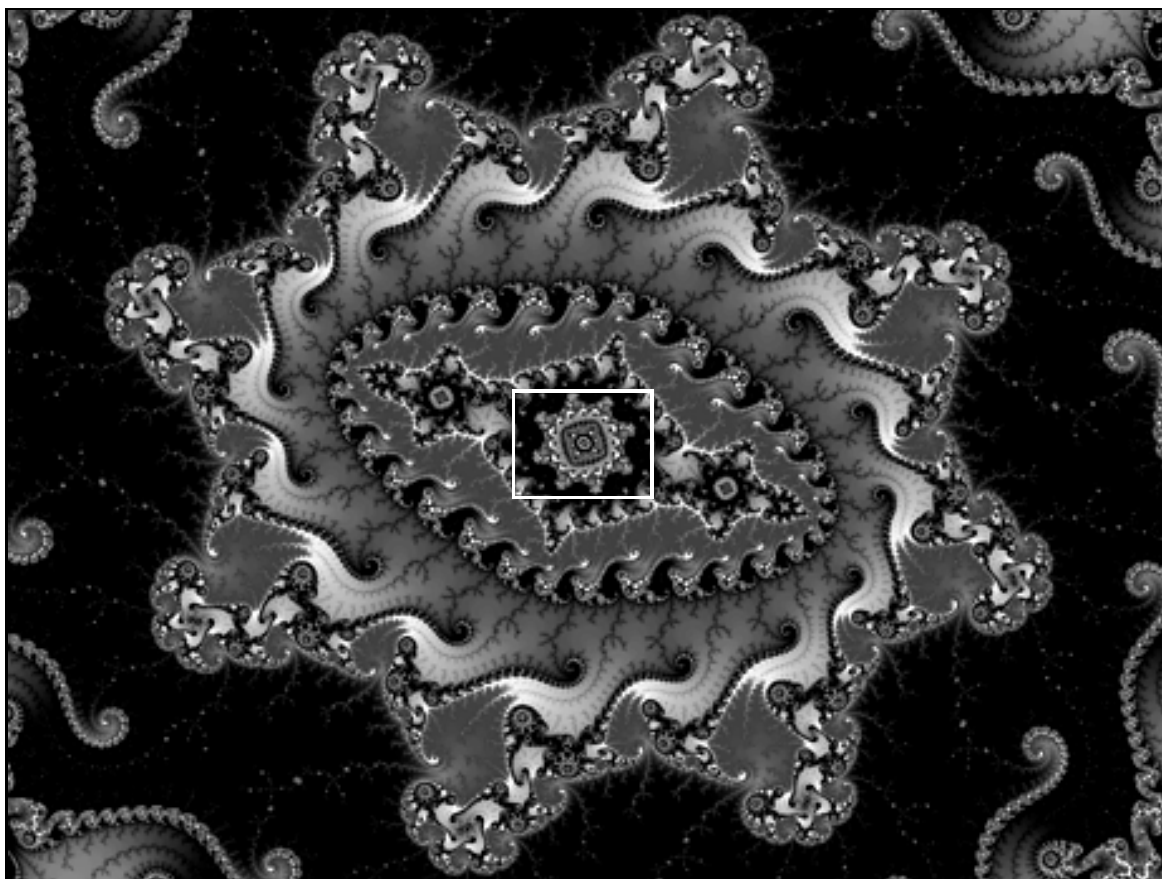


fig 27 (ovan).
fig 28 (nedan).

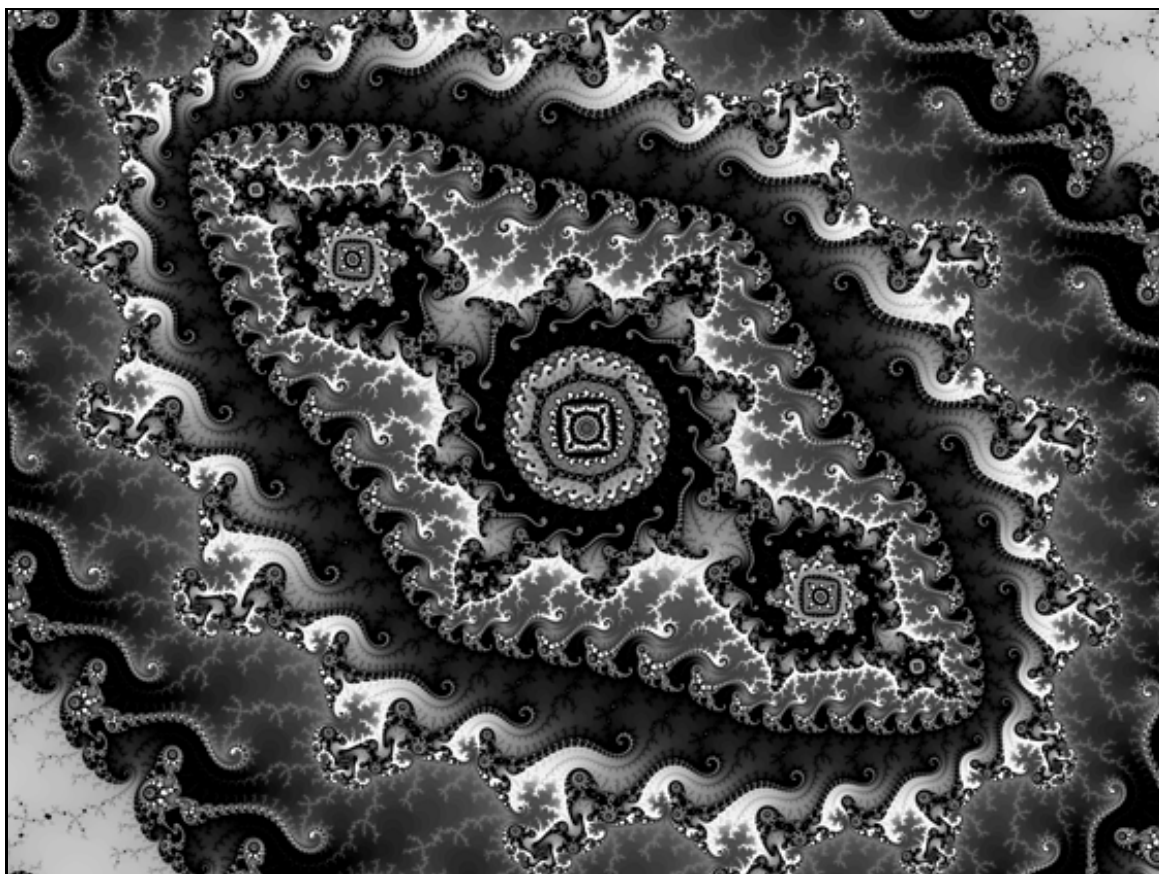


fig 29. DIN BILD

Några kommentarer till zoomsekvensen

Skrevet hos minikopian, fig 5 & 6, har alla strukturer som hos motsvarande parti hos den stora figuren plus sekundärstrukturerna i form av grenverket med 4-armade stjärnor. Dessa grenstrukturer tättnar allt mer ju närmare minikopian man kommer. Närmare bestämt har vi först dom två grenar som angör i skrevet och antennen, m a o grenen som minikopian är en del av, sedan fyra, två nya grenar ansluter i sidorna, sedan åtta, sexton....., och så småningom oändligt många oändligt nära figuren.¹ I fig 7-8 går vi in i ett område i sekundär-strukturen, som är anslutet till spiralen, där vi väntar oss se en ny minikopia. I stället ser vi, fig 9, en spöklik hägring av de former vi ser i fig 6. Denna hägring har formen av den icke sammanhängande juliamängd som vi får om vi hämtar ett c-värde från motsvarande position relativt den stora skalbaggen.² Fortsätter vi in mot mitten, passerar vi ett antal "insegel", där andra inseglet (om vi räknar hägringen i fig 9 som det första) är en hägring med fyra hörn etc (fig 11). Längre in upprepas "strukturfördubblingen" för varje nytt insegel, samtidigt som dom kommer tätare och tätare. Längst in i mitten av dessa insegel hittar vi slutligen en ny minikopia. I fig 11 fortsätter vi

¹ Dessa sekundärstrukturer ansluter de ställen hos minikopian som i huvudfiguren motsvarar de ställen där de "externa vinklarna" (efter förkortning) har formen $k/2 \bmod 1$, k och n heltal. (t ex $3/8$, $5/16$ av ett helt varv). I bilder där nivåmängderna runt mandelbrotmängden visas med s k binary decomposition, kan man se dessa vinklar som de gränslinjer mellan de mörka och ljusa fälten som träffar mandelbrotmängden. Se figur 30 nästa sida.

² Om sambandet mellan mandelbrotmängden och juliamängderna, se Vägen till mandelbrotmängden, referens i litteraturlistan.

stället in i övre delen. Där går vi in mellan två spiraler, det 2:a spiralmötet, och finner där (fig 14) en liknande struktur som i fig 11. I mitten av fig 14 ligger emellertid en avlång larvliknande sak (fig 15), vars former därefter fördubblas i vartannat insegel om vi fortsätter zooma in mot mitten av denna larv. Nu fortsätter vi emellertid inte in mot mitten utan zoomar in i övre delen av larven och finner där en liknande larv. Den fortsatta resan innåt går sedan omväxlande in mot mitten av strukturerna vi finner, omväxlande på "sniskan". När man förstorar (i gränsen till) mandelbrotmängden gäller att ju längre man väntar med att gå in mot "händelsernas centrum", desto intressantare och mer fantastiska former finner man.

Fortsätter man zooma mot mitten i sista bilden finner man så småningom en minikopia av hela mandelbrotmängden. När man nalkas en minikopia kommer hela inzoomningshistorien tillbaka i förtätad form, men med strukturerna (grenar, spiraler, insegelstrukturer etc) i tur och ordning fördubblade den ena gången efter den andra (d v s antalet hörn på insegel etc växer från 2 till 4, 8, 16 etc till oändligt antal oändligt nära minikopian).

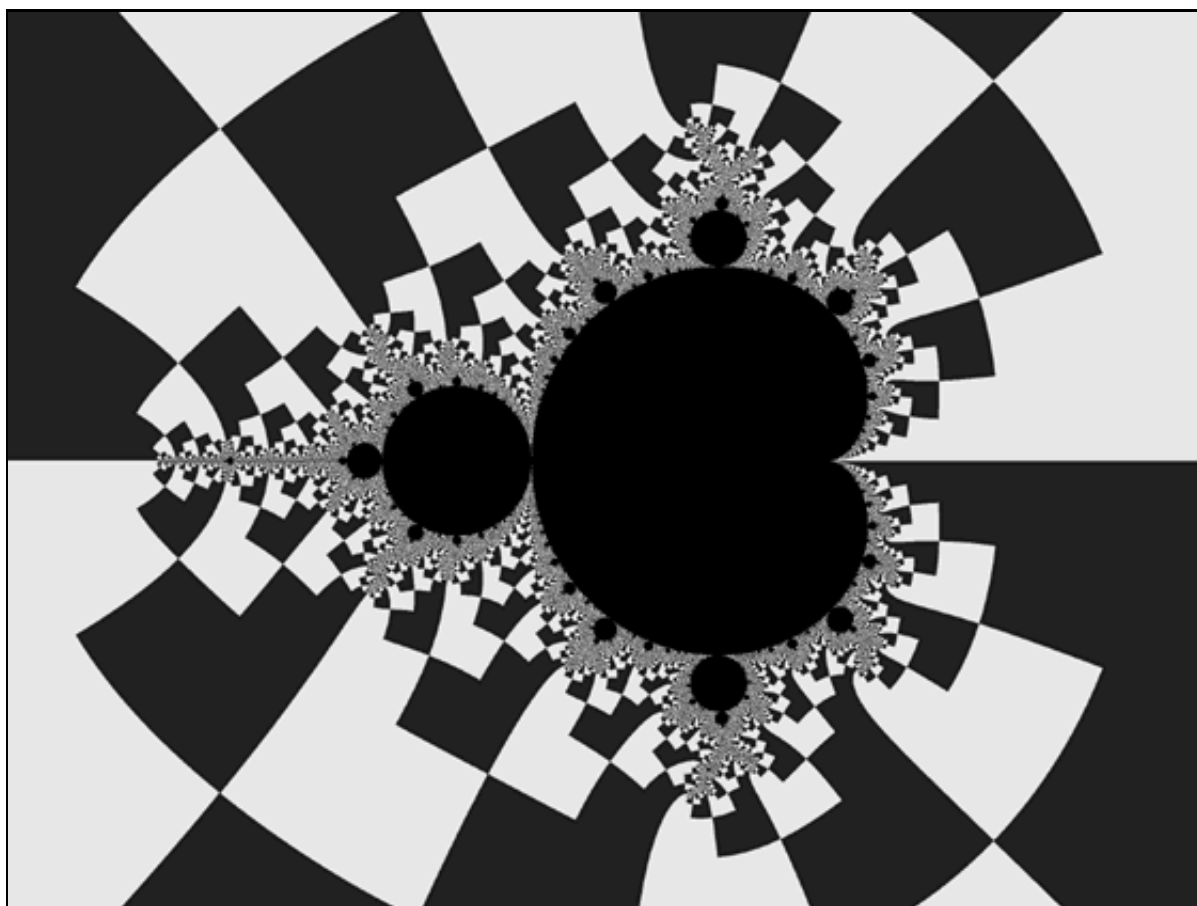


fig 30. Mandelbrotmängden där de omgivande nivåmängderna är uppdelade efter huruvida orbiten av den kritiska punkten ($z = 0$) når målmängden på den övre eller undre halvan av talplanet, s k *binary decomposition*. De radiella gränslinjerna mellan de mörka och ljusa fälten träffar mandelbrotmängden på de ställen som motsvarar de ställen hos minikopior där sekundärstrukturer ansluter.

Skalförändringar

Förstoringen i DIN BILD är $3,109 \times 10^{28}$. Betrakta nu första bilden i zoomsekvensen (figur 2). Man kan nu se zoomsekvensen som att man fixerar mot den punkt (koordinat) mot vilken man zoomar och låter hela mandelbrotfiguren expandera tills vi är framme vid vårt motiv (figur 29). Låt oss anta att mandelbrotfiguren i figur 2 är 1 dm lång. Hur lång är den då när vi låtit den växa så att vi ser strukturerna i figur 29? Svar: Längden är $3,109 \times 10^{28}$ dm = $3,109 \times 10^{27}$ m. Längden av den sträcka ljuset färdas på ett år, dvs 1 ljusår, är $9,461 \times 10^{15}$ m = 9 461 miljarder kilometer. Detta innebär att med förstoringen i DIN BILD skulle hela mandelbrotfiguren ha en utsträckning på $3,109 \times 10^{27} \text{ m} / 9,461 \times 10^{15} \text{ m} = (3,109 / 9,461) \times 10^{27-15} = 0,32861 \times 10^{12} = 3,2861 \times 10^{11} = 328,61$ miljarder ljusår. Avståndet till dom yttersta delarna vi i dag kan se av det överblickbara universum är högt räknat 15 miljarder ljusår. Detta innebär att med förstoringen i sista bilden skulle mandelbrotfiguren ha en längd av ca $328,61 / 15 = 21,9$ gånger avståndet till det kända universums överblickbara gräns!!!

Vidare läsning

KAOS, vetenskap på nya vägar av *James Gleick*. Bonniers förlag. Boken kom ut på svenska 1988 och är ett spännande stycke vetenskapshistoria. Innehåller några läckra färgbilder, bl a en inzoomningsekvens i mandelbrotfiguren.

The Beauty of Fractals av *H.-O. Peitgen* och *P.H. Richter*. Springer-Verlag. Den tunga kapitlen är skrivna av matematikprofessorer för andra matematikprofessorer. Innehåller ett otal fraktalbilder både i svartvitt och färg. Dessa bilder har ingått i en internationell utställning om datakonst.

The Science of FRACTAL IMAGES av *H.-O. Peitgen* och *Dietmar Saupe*. Springer-Verlag. En parallellbok till "The Beauty of Fractals" skriven för programmerare och innehåller ett otal algoritmer för fraktalprogram. Behandlar även landskapsfraktaler.

Fraktaler BILDER AV KAOS OCH KOSMOS av *Bo E Carlsson*. Prisma. Kortfattad historisk och matematisk genomgång på en lagom nivå av alla typer av fraktaler.

Vägen till mandelbrotmängden. Introduktion till matematiken bakom julia- och mandelbrot-fraktalerna för folk med grundskolekompetens i matematik. Drygt 40-sidigt kompendium som beskriver det matematiska och figurmässiga sambandet mellan juliamängderna och mandelbrotmängden. Innehåller ett 30-tal illustrationer. Ett måste för alla som är nyfikna på fraktaler, men som saknar förkunskaper. Alla konstiga ord som "iteration", "orbit", "komplexa tal" etc förklaras utförligt. Kan laddas ner som pdf-fil från min hemsida (adress, se nästa sida under "Internet").

Kompendier. Till alla mina fraktalbilder ingår skräddarsydd dokumentation. Runt 27 motiv finns. Ca en tredjedel av motiven är förstoringar i mandelbrotmängden, några mycket djupa där dom djupaste förstoringarna innebär att huvudfiguren skulle sträcka sig långt bortom rymder vida. I tillhörande kompendier visas hela den spännande zoomsekvensen till respektive bild. Ett par av dessa finns även som sk fototryck på HANES T-shirts med hela mandelbrotfiguren på baksidan. Även college tröjor finns.

Dom resterande motiven kommer från motsvarigheten till mandelbrotmängden för polynom av tredje graden. Denna motsvarighet är ett fraktalt monstrum med utsträckning i fyra!!! rumsdimensioner, som därför får studeras i tre- eller två-dimensionella genomskärningar. Läs om hur och alla varför i den spännande dokumentationen (på minst 18-sidor) till respektive bild. Bilder från parameterrymderna för polynom av ännu högre gradtal är på väg.

Internet: Har du tillgång till internet når du mina motiv om du går via min svenska huvudsida:

<http://klippan.seths.se/ik/ik>

Chaotic Series:

För snart två år sedan skrev jag en illustrerad artikelserie för ett par fraktala mejl-grupper. Enda förkunskapskravet för den matematiska delen är kännedom om vad komplexa tal är. För detta finns en länk i först i serien (eller kan man inhandla "Vägen till mandelbrotmängden"). Exempel på titlar är, *The complete Lesbian Mystery*, *Cracks, where do they come from*, *The reason why the Trolls burst* etc. De mer än 30 artiklarna är nu redigerade som pdf-dokument och finns uppladdade på:

<http://klippan.seths.se/fractals/articles>

Länk finns givetvis också på min "vanliga" sida.

Om bilden

Bilden har en upplösning på 12 800 x 9 600 bildpunkter och har skrivits ut på färg-laserskrivare, Canon CLC3200 hos Citytryck i Helsingborg.

Synpunkter, frågor och beställningar

mottages tacksamt av *Ingvar Kullberg*, Snickaregatan 1B, 264 70 Klippan, tel 0435-224 83. E-post: ik@klippan.seths.se