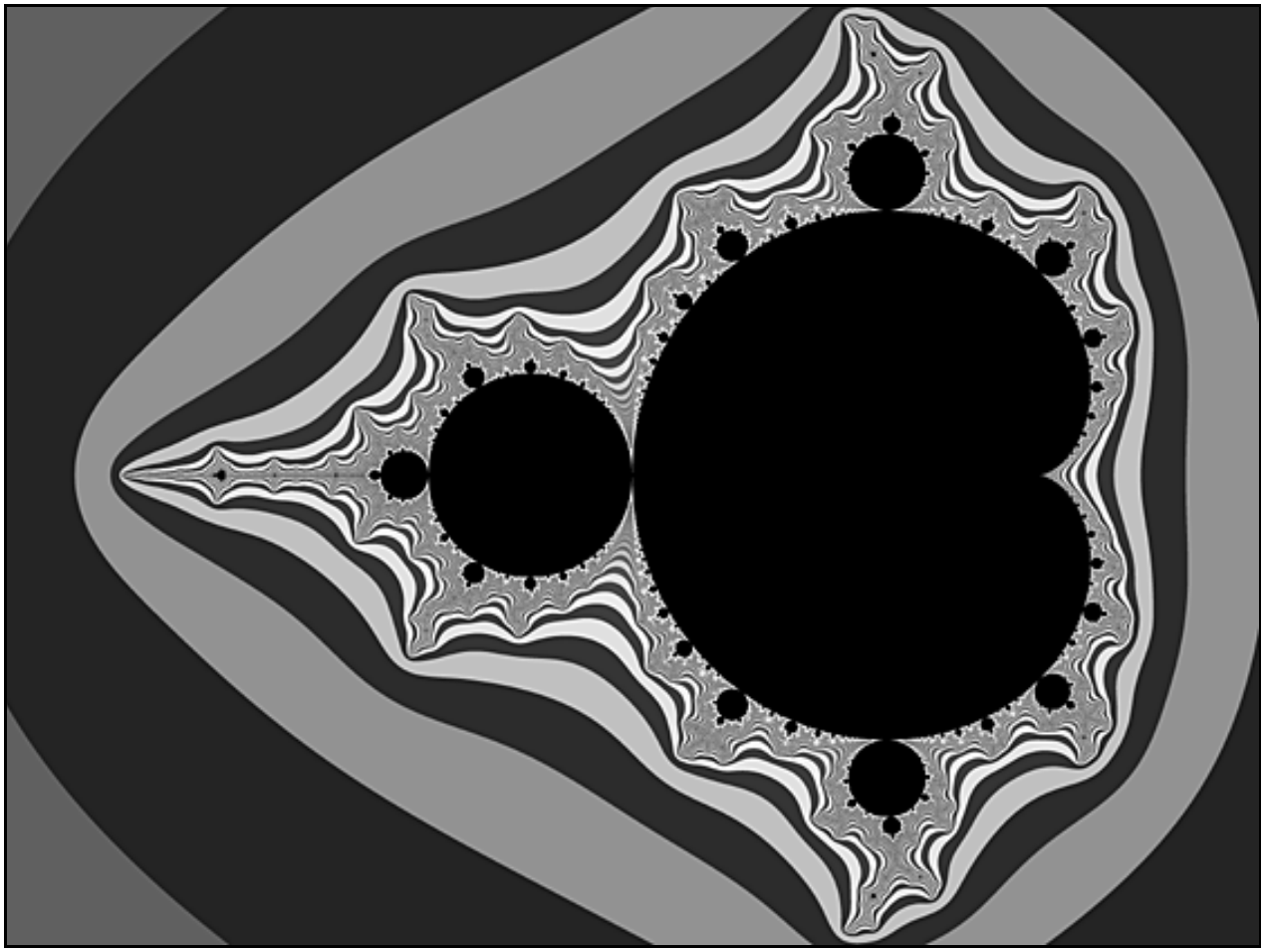
Vägen till mandelbrotmängden



Introduktion till matematiken bakom julia- och mandelbrot-fraktalerna för folk med grundskolekompetens i matematik

Copyright © *Ingvar Kullberg* 1993

pdf-version 2005

Förord

Många av ärade tilltänkta läsare har kanske sett i tidningar eller i TV de smått chockerande färgsprakande mönster som kallas *fraktaler*, (speciellt kring åren 1988 - 1990) och därvid fått till livs att de är datorgenererade enligt en ny gren inom matematiken som kallas *fraktalgeometri*. Denna nya "naturens geometri", som den också kallas, har visat sig vara ett mycket användbart redskap för att beskriva så vitt skilda saker som kustlinjer, bergsformationer, våtmarker, blodkärlens förgreningar, störningsfrekvenser på teleledningar, variationer av aktiekurserna, vädrets variationer, galaxers och galaxhopars fördelning i världsrymden etc. M a o tangerar fraktalgeometrin hela tillvaron. En av de uppslagsändar som fick fraktalgeometrins fader, den polsk-judiske matematikern *Benoit Mandelbrot* verksam i USA, att upptäcka denna nya gren inom matematiken var bomullsprisernas variationer över ett sekel.

Dom hallucinationsartade vackra bilder som oftast förknippas med fraktaler, är dock resultatet av ett nytt sätt att studera matematiska funktioner. Detta "nya sätt" grundlades redan på 1920-talet av de båda franska matematikerna *Gaston Julia* och *Pierre Fatou.* Det var dessa båda herrar som postulerade de matematiska objekt som kommit att kallas juliamängder. Eftersom det inte fanns några datorer som kunde visualisera dessa mängder, var det få som begrep vad det rörde sig om och deras verk glömdes i stort sett bort. Det var tack vare bl a Mandelbrot och räkneglada datorer som juliamängderna bokstavligt talat kom ut i ljuset. Ut i ljuset kom även urfadern till juliamängderna, efter sin upptäckare kallad *mandelbrotmängden*. Det är om hur dessa mängder, mandel och julia, genereras som detta kompendium handlar.

Det första kompendium författaren gav ut som behandlar det matematiska och figurmässiga sambandet mellan juliamängderna och mandelbrotmängden, bar titeln "Mönstret på din tröja" Kompendiet ingår vid köp av T-shirt eller college-tröja med en vacker juliafigur på och är något av en föregångare till detta kompendium. Sedan har författaren låtit trycka tröjor med en djup förstoring i mandelbrotmängden, samt även låtit göra ett antal A4-planscher med ett par andra djupa förstoringar i mandelbrotmängden. Till vart och ett av dessa motiv ingår ett kompendium som dels kortfattat beskriver mandelbrotmängden, dels innehåller en serie svartvita bilder som visar respektive inzoomningsekvens. I dessa senare kompendier förklaras matematiken bakom mandelbrotmängden kortfattat i följande kryptiska ordalag:

"Matematiskt består mandelbrotmängden (oftast svart på färgbilder) av de punkter "c", på det komplexa talplanet där den komplexa variabeln "z", för processen $z \to z^2 + c$, *<u>inte</u> går mot oändligheten då* $z = 0$ *är startvärde. Färgerna runt omkring anger efter hur många iterationer för ett visst "c", den komplexa variabeln "z" växt utanför en viss radie (i mina bilder radien 10). Om "z" någonsin når utanför en radie av 2, kommer "z" att växa snabbare och snabbare i all evighet och motsvarande "c" tillhör alltså inte mandelbrotmängden".*

I detta kompendium förklaras bl a ovanstående lugnt och metodiskt. Detta på en nivå där alla med grundskolekompetens skall kunna hänga med. Enda kravet är nyfikenhet och brist på fördomar om att "detta är för svårt för

mig". Som vi skall se behöver det faktum att de mönster vi tittar på är mycket komplicerade inte alls betyda att matematiken som genererar dessa figurer är komplicerad. Att komplicerade mönster och beteenden kan ha enkla orsaker (och vise versa) är dessutom en av upptäckterna av den nya kaosforskningen.

Jag som skrivit detta kompendium är inget proffs på matematiken bakom fraktaler, utan mina matematiska kunskaper är kvardröjande sådana sedan gymnasietiden. Ej heller tillhör jag den skara hackers som sitter och skriver egna program utan håller till godo med vad som bjuds. För folk som kan programmera är det emellertid lätt att göra program för mandelbrot- och julia-figurer.

För framställande av detta alster har följande datorprogram för Macintosh använts:

FractalMagic 3.0.3b av *Dave Platt* från Sintar Software. En kommersiell lite snabbare version av public domain-programmet MandelZot. Med detta program har samtliga mandelbrot- och julia-figurer framställts.

Fractal World av *Niklas Lindholm,* Kullavik, ej publicerat ännu. Detta program har använts för framställning av koch-kurvan i 1:a kapitlet..

MacDraw II 1.1, *Claris Corporation,* för redigeringen av bilderna.

MacWrite Pro 1.0Sv2, *Claris Corporation,* för ordbehandling och sammanställning av kompendiet.

Pdf-versionen 2005

Bilderna och texten har flyttats över till windowsplattform via *ClarisWorks* (mac & PC) och monterats på nytt i detta program och därefter skivits ut till ett pdf-dokument anpassat för dubbelsidig utskrift. För att varje kapitel ska börja på udda sida är vissa sidor blanka. Dispositionen är densamma som i det ursprungliga kompendiet, men teckenstorleken i brödtexten har krympts från 14 till 12 punkter och texten gjort smalare. Detta för att göra texten mer läsbar. Om vissa illustrationer ser konstiga ut på skärmen, ändra storlek!
Omslagsbilden samt figur 21 & 32 är gjord med *Ultra Fractal,* medan figur 31 är gjord med *fractal eXtreme.*

Synpunkter, frågor och beställningar

mottages tacksamt av *Ingvar Kullberg,* tel 0435-224 83.
E-post: *ik@klippan.seths.se.* Hemsida: *http://klippan.seths.se/ik/ik*

Innehåll

Förord....3

Innehåll....5

1) Kort om fraktaler i allmänhet....7

2) Tallinjen....11

3) Iteration....13

4) De fantiserade talen och det komplexa talplanet....15

5) Iteration i det komplexa talplanet....17

6) Det kaotiska intervallet....19

7) Färgerna då?....21

8) Några juliamängder....25

9) Mandelbrotmängden....33

10) Det lesbiska mysteriet....37

11) Vad vi inte talat om....43

Tillägg till pdf-versionen....47

I) Enkelhet och komplexitet....47

II) Den fulla motsvarigheten till mandelbrotmängden för polynom av tredje graden....49

Vägen till mandelbrotmängden

1) Kort om fraktaler i allmänhet

Ordet *fraktal* är en försvenskning av engelskans *fractal* och myntades första gången på 1970-talet av den i förordet nämnde fraktalgeometrins fader, Benoit Mandelbrot. Mandelbrot bildade ordet från latinets *fractus* vilket ungefär betyder 'sönderbruten'. M a o. fraktalgeometrin beskriver det som är kantigt och sönderbrutet i tillvaron. En del av rötterna till fraktalgeometrin är monsterfigurer från sekelskiftet. En sådan monsterfigur är den s k von Koch-kurvan eller Koch snöflinga, uppkallad efter den svenske matematikern Helge von Koch. Figur 1 visar hur denna bildas figurmässigt. Alltså:

I) Vi utgår från en vanlig liksidig triangel.

II) På var och en av de tre sidorna, ersätter vi mittersta tredjedelen med två sidor i en ny liksidig triangel varvid varje sida sväller upp till fyra sidor, varför den ursprungliga triangeln nu blir en Davidsstjärna med 4 x 3 = 12 sidor.

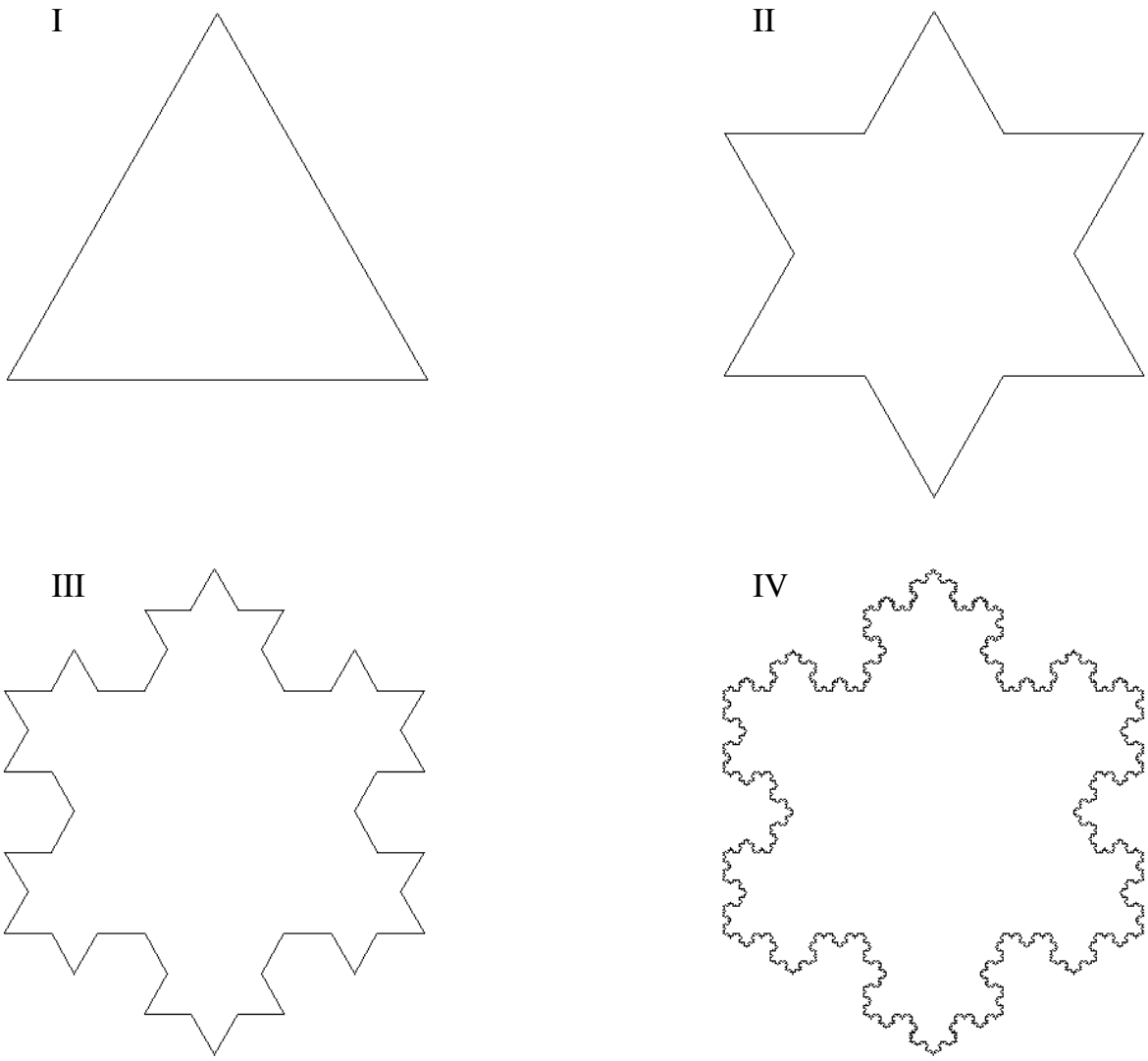


fig 1. Von Koch snöflinga steg för steg.

III) På var och en av dessa 12 sidor ersätter vi ånyo mittersta tredjedelen med två sidor av en liksidig triangel.

IV) Efter att i oändlighet upprepat ovanstående operation på alla nya uppkomna sidor, är vår fraktalkurva färdig.

Sista figuren är naturligtvis ingen fullt utbildad fraktal. Inte ens en dator kan upprepa en operation i det oändliga, men bilden ovan ger för fantasin en vision av hur den fullt utbildade koch-kurvan ter sig. Med hjälp av denna fraktalkurva skall vi nu titta på vilka egenskaper en fraktal har i största allmänhet:

1) Koch-kurvan liksom andra fraktaler genereras genom att en oftast enkel operation upprepas i det oändliga, s k iteration.

2) För varje iteration ökar koch-kurvans omkrets. När kurvan är klar (om man nu kan säga så när det rör sig om oändligt många iterationer) är omkretsen lika lång som till randen av ett oändligt universum trots att den inneslutna arean är ändligt stor.

3) Vi tittar nu på övre delen av snöflingan (fig 2). Det uppförstorade inramade området ser likadant ut som hela den övre figuren. Hur mycket vi än förstorar återkommer samma mönster. Man säger att en fraktal är självliknande i alla skalor. Kochkurvan och andra monsterkurvor från sekelskiftet ansågs inte ha någonting med verkligheten att göra. Mandelbrot fann emellertid att former i naturen, kustlinjer, berg, molnformationer, åskblixtar etc var var mycket mer besläktade med dessa monsterfigurer än med vanliga geometriska objekt, t ex trianglar klot etc. I början av 80-talet gav Mandelbrot ut en bok, The Fractal Geometry of Nature, som kommit att bli en kultbok. Boken inleds med de bevingade orden: "Moln är inga sfärer, berg är inga koner, kustlinjer är inga cirklar, bark är inte slät, ej heller färdas åskblixten längs en rät linje". Naturen låter helt enkelt inte sig mätas i den vanliga geometrins begrepp, längd, area etc. Hur lång är bohuskusten till exempel? Det beror på i vilken utsträckning man blundar för uddar och fjordar. Fjordarna har sedan mindre vikar etc. Även om dessa mindre vikar inte är någon exakt kopia av den större viken, har de dock ofta samma grad av kantighet. Även en kustlinje är alltså självliknande om inte i alla, så dock i många skalor. En kustlinje, liksom ett träd eller ett berglandskap är alltså en ansatts till en fraktal. Ju noggrannare man mäter, dess längre blir kusten. Att tala om en kusts längd är alltså meningslöst. Ett annat begrepp än längd får alltså tillgripas när man vill kvantifiera en kustlinje. Därmed är vi inne på den sista egenskapen som är speciell för en fraktal, nämligen fraktaldimension.

4) En punkt har dimensionen noll, en linje (den må vara rak eller en del av t ex en cirkelbåge) har dimensionen ett, en area dimensionen två (det krävs två tal för att definiera den), ett rum dimensionen tre (längd, höjd och bredd). Vilken dimension har då vår kochkurva? Den är för tillknycklad för att bara vara en linje, men den är ingen yta heller. Den är något slags mellanting. Matematikerna säger att den har en fraktaldimension på ca 1,26!!! Fraktaler har alltså dimensioner som ligger mellan heltalen!!! Hur man bestämmer en fraktals dimension behandlas inte i detta kompendium, men ju kantigare en kurva är, ju

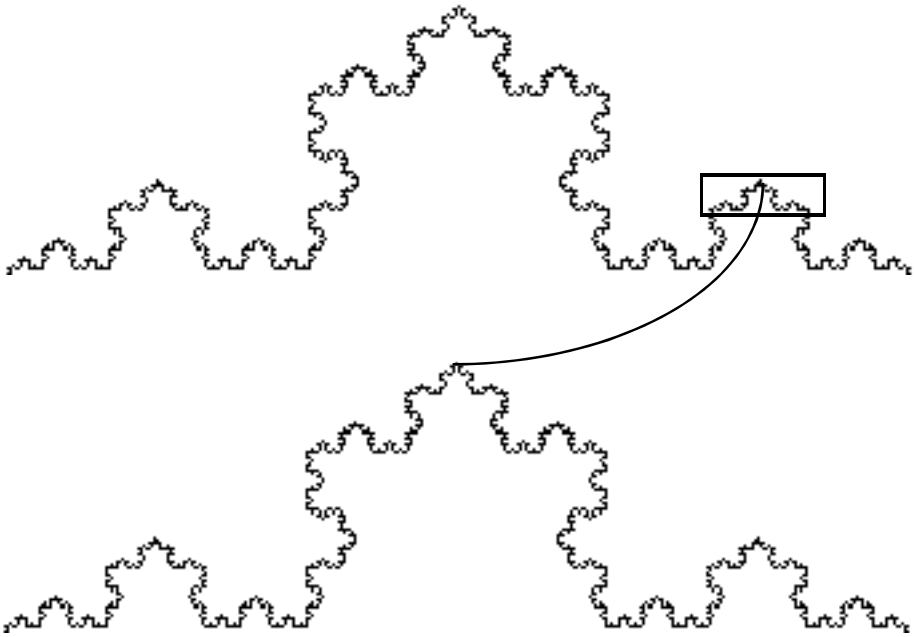


fig 2. Övre delen av Von Koch snöflinga. Det inramade området ser likadant ut som so hela överdelen.

längre från 1 ligger dess dimension. Storbritanniens kustlinje har en fraktaldimension på ca 1,30, medan Norges kustlinje säges vara 1,52-dimensionell!!! På samma sätt har en landyta en fraktaldimension som överstiger två, p g a dess höjder. kullar och berg.

Denna nya "naturens geometri" har tillsammans med datorernas intåg i tillvaron gjort det lätt som en plätt för t ex filmindustrin att göra landskap till sina filmer, landskap förvillande lika verkliga landskap. Hur landskapsfraktaler genereras ligger utanför författarens kunskapsområde. Ämnet för detta kompendium är istället de märkliga mycket färgsprakande och vackra fraktalmönster som finns i kanten av den s k mandelbrotmängden, och tillhörande juliafigurer. I det följande skall jag efter bästa förmåga berätta historien om hur dessa figurer genereras och deras innebörd. Många av ärade läsare har säkert läst någonting om att dessa figurer bildas genom den iterativa processen $z \rightarrow z^2 + c$ i något som kallas det komplexa talplanet. Dessa tungvrickande begrepp skall lugnt och metodiskt förklaras i det följande.

2) Tallinjen

Tallinjen är en rak horisontell linje, oändligt lång. På denna ligger alla våra "vanliga" tal placerade med nollan i mitten, de positiva talen till höger och de negativa till vänster. Eftersom den innehåller alla bråktal (t ex 1/2, 2/3 etc) och alla irrationella tal (som ej går att skriva som allmänna bråk och som inte har en periodisk decimalutveckling, t ex *pi)* är denna talens linje sammanhängande.

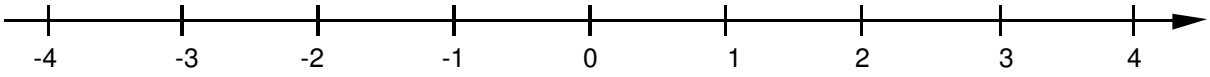


fig 3. En bit av tallinjen.

3) Iteration

Iteration betyder, som vi sett ovan, 'upprepning'. Vad händer om man tar ett tal, kvadrerar det (multiplicerar det med sig självt), kvadrerar resultatet etc i all oändlighet, uttryckt på matematiska $x \to x^2$ (läs x blir x^2, "x" är vilket tal som helst, pilen betyder att resultatet, d v s det kvadrerade talet blir nytt ingångsvärde, d v s nytt x etc i all oändlighet). I de flesta fall blir resultatet större och större, ex $2 \to 2^2 = 4 \to 4^2 = 16 \to 16^2 = 256$..... -> +oä (läs *plus oändligheten).*[1] Men tal mindre än 1 men större än -1 går mot noll, ex $1/2 \to (1/2)^2 = 1/4 \to (1/4)^2 = 1/16 \to (1/16)^2 = 1/256$..... -> 0. Den serie av värden man erhåller för ett visst startvärde, kallas detta startvärdes *orbit.* Orbiten för talet 2 t ex, som genereras av den dynamiska processen $x \to x^2$, är alltså $2 \to 4 \to 16$ etc. Om vi på tallinjen markerar alla startvärden vars orbits inte går mot oändligheten för denna dynamiska process, får vi en rak linje fr o m -1 t o m +1 (fig 4).

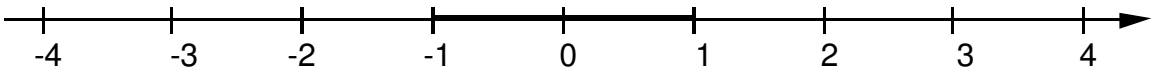


fig 4.

Eftersom ett negativt tal multiplicerat med sig självt ger en positiv produkt ger alla begynnelsevärden till vänster om nollan samma orbits fr o m 2:a termen som motsvarande positiva begynnelsevärden, t ex $-2 \to (-2)^2 = 4 \to 4^2 = 16$ etc. Tal som ligger utanför den tjocka linjen har alltså orbits som går mot plus oändligheten, medan de tal som ligger innanför ändpunkterna på linjen har orbits som går mot noll. Man säger att för processen $x \to x^2$ är oändligheten attraktor för tal större än 1 och mindre än -1, samt att noll är *attraktor* för tal mellan -1 och 1.

Vad händer med ändpunkterna på linjen när vi kör vår dynamiska process? Högra ändpunkten, d v s +1, påverkas inte eftersom $1*1 = 1$. En sådan punkt kallas *fixpunkt*. Vänstra punkten, -1, ger orbiten $-1 \to (-1)^2 = 1 \to 1 \to 1$ etc, d v s som orbiten för +1 ovan efter en iteration. En sådan punkt kallas *förperiodisk* därför att den efter ett antal iterationer, i detta fall en iteration, uppnår sin periodiska cykel, i detta fall perioden 1. Fixpunkterna till processen $x \to x^2$ får vi genom att lösa ekvationen $x = x^2$. Eftersom denna är en andragradsekvation bör den ha två lösningar. Vår ekvation är så enkel att vi inte behöver gå in på hur man löser sådana, utan vi ser direkt att lösningarna är $x = 0$ och $x = 1$, eftersom $0 = 0^2$ och $1 = 1^2$. Även 0 är alltså en fixpunkt. De båda fixpunkterna, 0 och 1, har dock olika karaktär. Ovan kallade vi 0 för en attraktor eftersom alla punkterna på tallinjen mellan -1 och 1 har orbits som närmar sig fixpunkten. En sådan fixpunkt kallas *attraktiv fixpunkt* (i detta fall är fixpunkten t o m superattraktiv, men detta skall vi inte gå in på här). Med den andra fixpunkten, 1, förhåller det sig helt annorlunda. Den attraherar endast två punkter på tallinjen, sig själv och den förperiodiska punkten -1 och exakt endast dessa. En sådan fixpunkt kallas repellerande fixpunkt. Tag t ex punkterna 0,999 och 1,001. Trots att dessa ligger mycket nära fixpunkten 1,

[1] Eftersom jag i skrivande stund saknar teckent för oändlighet (liggande 8) på min windows-dator, skriver jag i stället ”oä”.

kommer deras orbits inte att närma sig denna fixpunkt, utan den förstnämnda attraheras av 0 och den andra av +oä (oändligheten är också en fixpunkt eftersom oä = oä^2 men när man löser ekvationer brukar man avse deras finita lösningar). En repellerande fixpunkt stöter alltså ifrån sig alla andra punkter utom sig själv och ett antal förperiodiska punkter.

Dessa båda punkter, -1 och 1, som utgör gränsen mellan de punkter vars orbits slängs ut mot oändligheten eller går mot noll, utgör den k*aotiska mängden* för x -> x^2. Med detta menas att ett "oändligt litet felsteg" vid sidan om dessa punkter (t ex 0,999 eller 1,001 i stället för 1) ger minst sagt olika slutresultat. Sådan känslighet för begynnelsevärdets exakthet kallas *sensitivt beroende av begynnelsevilkor* (jmf fjärilen som fladdrar till i Burmas regnskog och får en orkan på Nordatlanten att ta en annan väg några månader senare). Denna kaotiska mängd kallas också *juliamängden* för x -> x^2. Därmed har vi tangerat underrubriken på kompendiet. För att kunna komma juliamängderna, som ofta är fraktaler, närmare in på livet måste vi först utvidga vårt talbegrepp. Först skall vi dock sammanfatta de tungvrickande termer som introducerats i detta kapitel;

-iteration,

-orbit,

-attraktor,

-fixpunkt, som kan vara attraktiv eller repellerande,

-förperiodisk punkt,

-kaotisk mängd,

-sensitivt beroende av begynnelsevilkor,

-juliamängd.

Med detta ordförråd kommer man långt i tungomålstalandet om fraktaler och kaos.

4) De fantiserade talen och det komplexa talplanet

I det föregående har vi sysslat med att kvadrera tal. Motsatsen är att dra (kvadrat-)roten[2] ur ett tal, med vilket menas att att man söker det tal som multiplicerat med sig själv ger det första talet; ex sqrt(9) = $\pm$3 eftersom $3^2 = 9$ och även $(-3)^2 = 9$, sqrt(16) = $\pm$4 eftersom $4^2 = 16$ och $(-4)^2 = 16$ etc. De flesta kvadratrötter är emellertid irrationella t ex sqrt(2) = $\pm$1,41421..... och sqrt(3) = $\pm$1,73205..... . Vad blir då roten ur ett negativt tal, t ex sqrt(-1)? Inte 1 eftersom $1^2 = 1$, ej heller -1 eftersom även $(-1)^2 = 1$. Det finns alltså inget tal som multiplicerat med sig självt blir -1 (och inget annat negativt tal heller). Det är dock inget som hindrar att man hittar på ett sådant tal, så länge man inte blandar ihop det med de vanliga talen. Detta är precis vad man gjort. Man säger helt enkelt att sqrt(-1) = $\pm$i, där *i* står för *imaginär* 'föreställd, fantiserad'. Således är såväl $i^2 = -1$ och $(-i)^2 = -1$. Nu kan man även dra roten ur andra negativa tal; sqrt(-9) = $\pm$3i, sqrt(-16) = $\pm$4i etc.

Med dessa imaginära tal kan vi göra en egen tallinje. För att hålla isär denna från "de vanliga" reella talens linje lägger vi den imaginära tallinjen vertikalt, och vips har vi ett plan, det *komplexa talplanet*. Ett komplex tal består av två komponenter, realdelen samt imaginärdelen som har ett "i" efter sig. I figur 5 (nedan) visas hur de komplexa talen -1+2i samt 3-i ligger i talplanet.

Att räkna med komplexa tal är inte mycket svårare än att räkna med de reella talen. Låt oss t ex addera de båda komplexa talen ovan, -1+2i och 3-i. Då

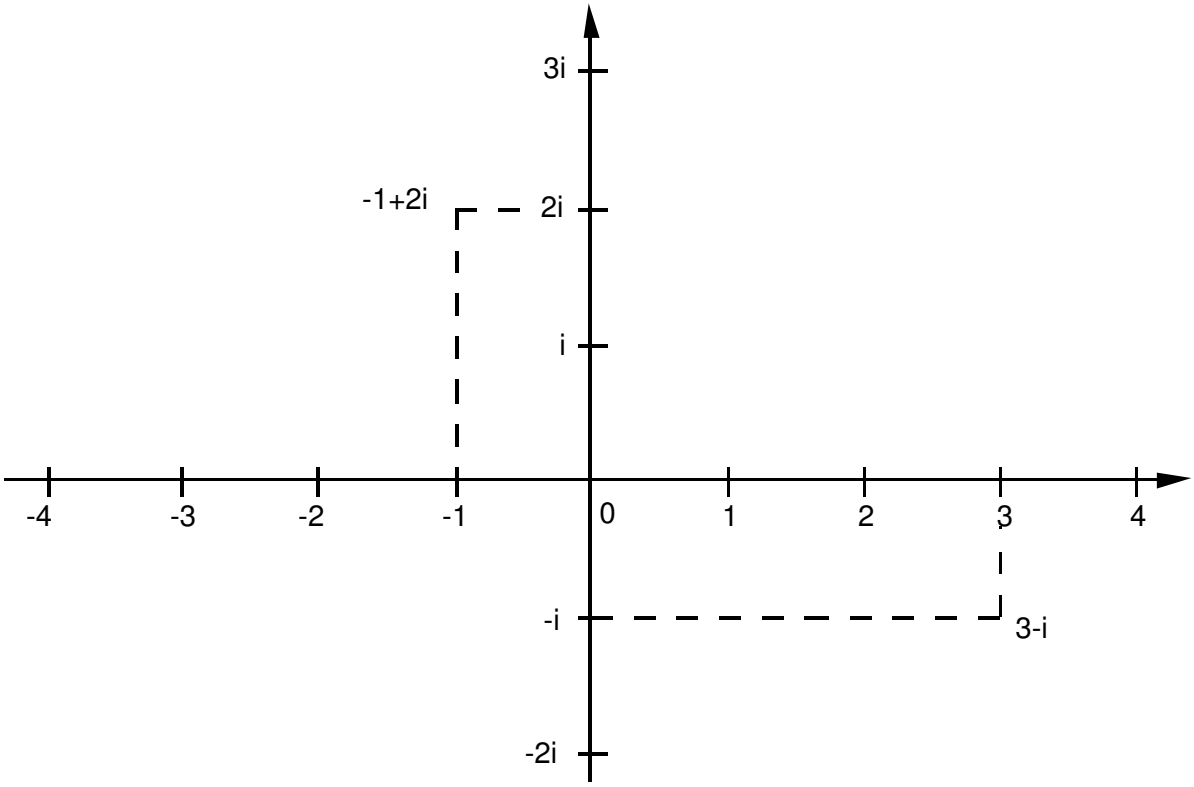


fig 5.

[2] Eftersom jag ännu inte har tillgång till tecknet för kvadratrot på min windowsdator använder jag förkortningen ”sqrt” (squarerot), vanlig i programmering

lägger vi helt enkelt tillsammans realdelen för sig och imaginärdelen för sig, alltså; (-1+2i) + (3-i) = **2+i.** På motsvarande sätt gör vi vid subtraktion; (-1+2i) - (3-i) = -1 + 2i - 3 + i = **-4+3i** (när vi tar bort parentesen efter minustecknet, byter vi tecken inuti parentesen). Vid multiplikation multiplicerar vi var och en av termerna i de båda parenteserna med varandra, alltså (-1+2i)*(3-i) = -3 + i + 6i - $2i^2$ = -3 + 7i - $2i^2$. Eftersom i^2 = -1 enligt definitionen av imaginära tal, får vi; -3 + 7i - 2(-1) = -3 + 7i + 2 = **-1+7i**. Division behöver vi inte gå in på här (man börjar med att förlänga med nämnarens s k konjugatkvantitet).

Härmed hoppas jag att begreppet "komplexa tal" är avmystifierat. Det väsentliga att veta för fortsättningen är att ett komplext tal har två komponenter, *realdel* och *imaginärdel*, och att ett komplext tal återges på ett plan, det *komplexa talplanet*, i stället för en linje (de vanliga talen kan betraktas som specialfall där imaginärdelen är noll).

5) Iteration i det komplexa talplanet

Innan ärade läsare läser detta kapitel, rekommenderar jag en kort repetition av kapitel 3 *Iteration.* Vi utför nu samma iterativa process, men istället för att bara hålla oss till den reella tallinjen, markerar vi de tal, z (z = x + yi), på det komplexa talplanet vars produkt inte går mot oändligheten för processen z -> z^2 och får då en fylld cirkel med radien 1 (fig 6).

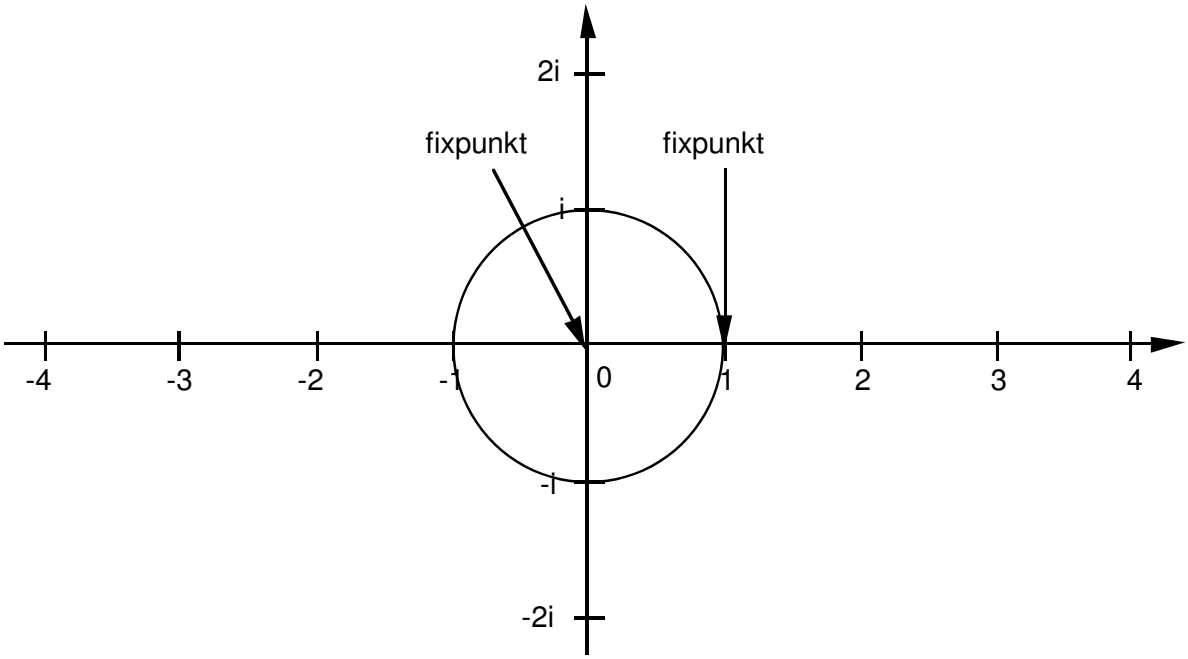


fig 6.

Med avseende på processen z -> z^2 finns tre slags punkter på talplanet:

1) Punkter utanför cirkeln har orbits som går mot oändligheten. Dessa sägs tillhöra *attraktionsbassängen oändligheten.*

2) Punkter innanför cirkeln har orbits som går mot den attraktiva fixpunkten z = 0. Dessa sägs tillhöra *attraktionsbassängen noll.*

3) Punkter på (och då menar jag exakt på) cirkeln har orbits som aldrig i evighet kommer att lämna cirkeln. Dessa punkter (=cirkeln) utgör alltså *juliamängden* för processen z -> z^2.

Punkter på juliamängden tillsammans med punkter som tillhör en domän som begränsas av juliamängden, i vårt fall punkter som ligger på och innanför cirkeln, kallas den *ifyllda juliamängden.* Den ifyllda juliamängden brukar vara svart på färgbilder.

Vilken orbit har en punkt på cirkeln? Som vi sett i kapitel 2, har vår dynamiska process en repellerande fixpunkt z = 1. Denna attraherar sig själv (1 -> 1 -> 1 etc) och den förperiodiska punkten z = -1 (-1 -> 1 -> 1 etc). När vi

endast såg till den reella tallinjen, utgjorde dessa två punkter hela juliamängden. Med vår nyligen vidgade syn på världen (kapitel 4) fann vi att dessa endast var två punkter på en cirkel. Då visar det sig att det finns många fler förperiodiska punkter som har orbits som leder till den repellerande fixpunkten z = 1, t ex z = i (högst upp på cirkeln) vars orbit är i -> -1 -> 1 -> 1 etc (eftersom $i^2 = -1$), eller z = -i (längst ner på cirkeln) vars orbit är -i -> -1 -> 1 -> 1 etc (eftersom även $(-i)^2 = -1$). Trots att oändligt många punkter på cirkeln är förperiodiska till vår fixpunkt utgör dessa inte hela cirkeln. Dessutom finns punkter, s k repellerande periodiska punkter, som ligger i periodiska cykler med perioden 2, 3..... etc, kort sagt alla cykler. Till dessa finns också förperiodiska punkter. Slutligen finns punkter på cirkeln vars orbits är helt kaotiska, d v s aldrig i evighet hamnar på samma ställe på cirkelbågen.

M a o cirkeln som i alla tider varit symbol för oföränderlighet och Gudomlig ordning utgörs i själva verket av ett ohyggligt kaos. I detta kapitel har följande konstiga ord tillkommit:

-attraktionsbassängen oändligheten,

-attraktionsbassängen noll,

-ifyllda juliamängden,

-repellerande periodisk punkt.

6) Det kaotiska intervallet

Den iterationsformel vi egentligen vill studera är $z \to z^2 + c$, där c är en konstant, gärna komplex den också (d v s c = a + bi), som vi lägger till vid varje iteration. Ovanstående juliamängd, cirkeln, är att betrakta som ett specialfall där c = 0. Vad händer om c inte är noll? Vi skall titta på ett annat specialfall där c = -2, d v s vi itererar nu $z \to z^2 + (-2)$, d v s $z \to z^2 - 2$. Den juliamängd vi nu får fram visar sig vara en rät linje fr o m -2 t o m +2 (fig 7).

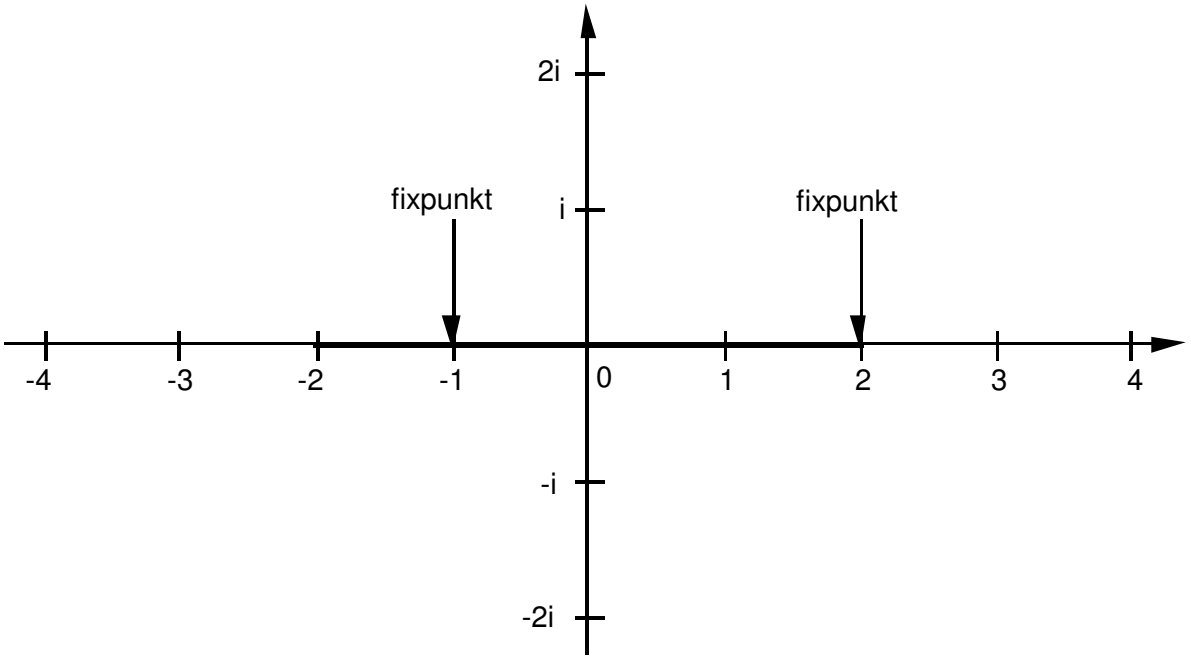


fig 7.

Denna simpla juliamängd är oändligt tunn och innesluter ingen domän som cirkeln. Fixpunkterna får vi genom att lösa andragradsekvationen $z = z^2 - 2$, vilken har lösningarna z = 2 och z = -1 eftersom $2 = 2^2 - 2$ och $-1 = (-1)^2 - 2$. Båda fixpunkterna är repellerande.

Juliamängdens utseende styrs alltså helt av värdet på konstanten c. <u>För alla andra värden än c = 0 (cirkeln) eller c = -2 (intervallet fr o m -2 t o m +2) är juliamängden en fraktal</u>. Innan vi tittar på några av dessa, skall vi titta lite på färgmystiken i de färgglada bilderna av dessa fraktala skönheter.

7) Färgerna då?

Datorprogrammen som genererar dessa färgglada bilder av juliamängderna är en sorts simuleringsprogram. Man bestämmer sig för att undersöka ett område av det komplexa talplanet, i bilderna av cirkeln och intervallet nedan, från -3 till +3 längs realaxeln, samt från -2i till +2i längs imaginäraxeln (bilderna är lägre än breda). Fönstret på datorskärmen som bilden ligger i har ett antal fyrkantiga bildelement, s k pixlar, antag för enkelhetens skull 600*400 = 240 000. Var och en av dessa 240 000 pixlar representerar nu ett komplext tal, z = x + yi. Första pixeln längst upp till vänster representerar alltså talet -3+2i, nästa pixel till höger representerar talet -3+(1/599)*6 + 2i (spannet i horisontalled från -3 till 3 är 6. Efter första pixeln måste man gå ytterligare 599 steg åt höger, eftersom upplösningen i horisontalled var 600). På samma sätt representerar pixeln närmast under översta pixeln talet -3 + 2i-(1/399)*4i (spannet i vertikalled från -2i till 2i är 4. Efter översta pixeln måste man gå ytterligare 399 steg nedåt, eftersom upplösningen i vertikalled var 400). Nu provar datorn (eller rättare sagt vårt program) vart och ett av de 240 000 komplexa talen om huruvida dess framåtriktade orbit för processen z -> z^2 + c efter t ex 100 iterationer fortfarande befinner sig inom en viss radie, låt oss välja radien 10, från det komplexa talplanets centrum. I så fall anses talet som var startvärde tillhöra den ifyllda juliamängden och motsvarande pixel tänds med svart färg. Om däremot dess orbit når utanför radien 10 efter 1, 2, ... eller 99 iterationer ligger startvärdet utanför den ifyllda mängden och kommer i raskt takt att bege sig mot oändligheten. Det är här våra färger kommer in. Vi delar nu upp attraktionsbassängen oändligheten. Området utanför en cirkel med radien 10 kallar vi målmängden (eng *target set*). Innanför cirkeln med radien 10 har vi i vårt fall 99 nivåmängder (eng *level sets)*, indelade efter hur många iterationer

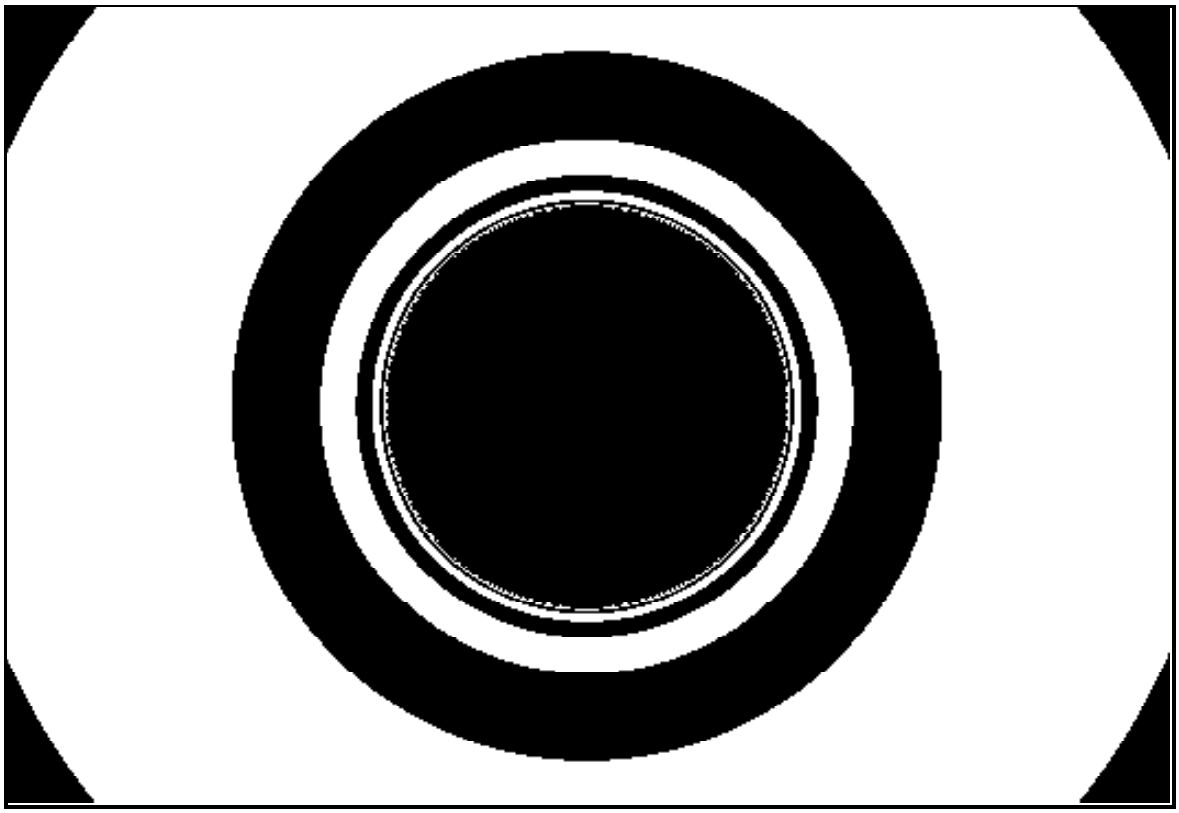


fig 8. c = 0.

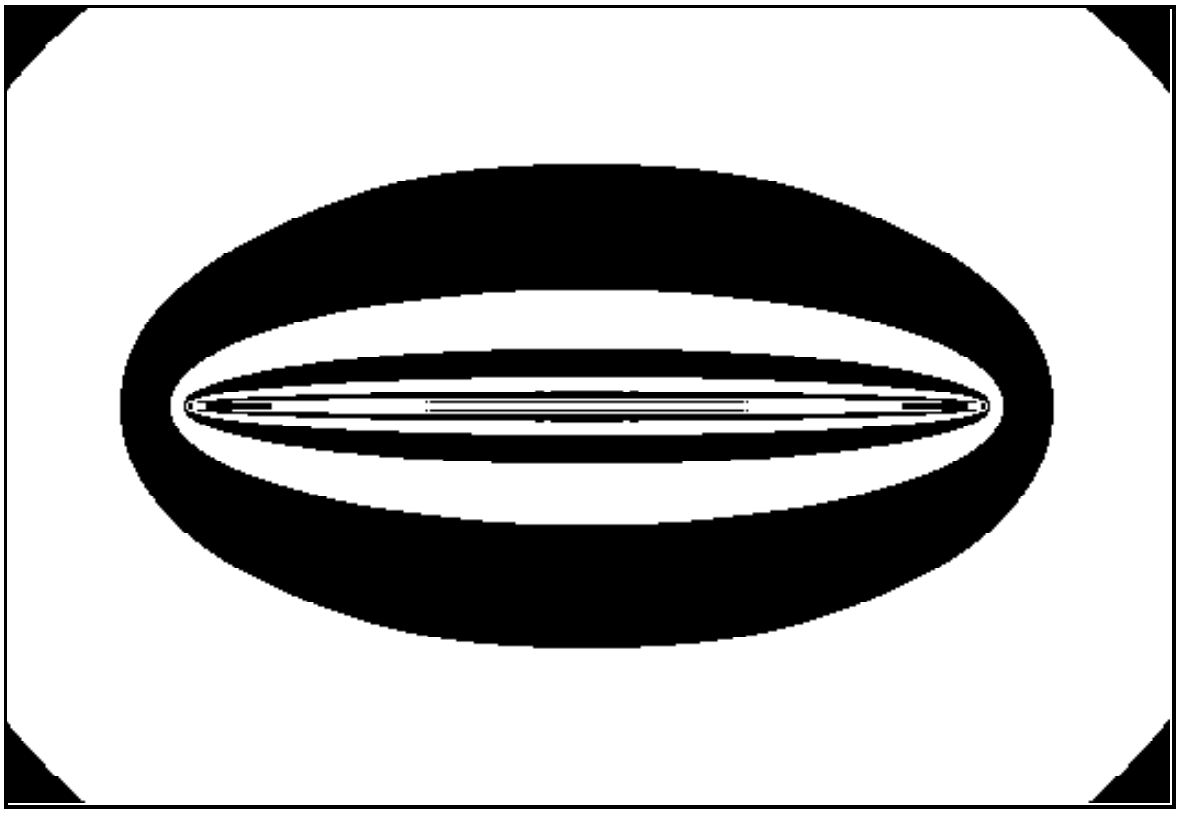


fig 9. c = -2.

som krävs för att det komplexa talets orbit skall nå målmängden. Det är dessa nivåmängder som färgsätts med olika färger enligt en efter tycke och smak passande färgskala. I figur 8 och 9 är färgskalan omväxlande svarta och vita fält (eftersom det blir för dyrt att göra kompendier i färg). Det svarta fältet som skymtar i hörnen tillhör nivåmängden 1, första vita fältet nivåmängden 2, andra svarta fältet nivåmängden 3 etc. Gränserna mellan nivåmängderna närmar sig juliamängden mer och mer. Då juliamängden i första fallet är en cirkel är gränserna mellan alla nivåmängderna cirklar. I andra fallet då juliamängden är en rak linje är det bara gränsen mellan målmängden och första nivåmängden som är en cirkel. de andra gränserna blir mer och mer ovala och går till sist inte att urskilja från linjen. I övriga fall när juliamängden är en fraktal, framhäver nivåmängderna mängden. I figur 10 visas ett exempel där c = 0,380 + 0,336i. Här undersöker vi ett något snävare fält inom det komplexa talplanet, från ca -1,8 till +1,8 längs realaxeln och från ca -1,2i till +1,2i längs imaginäraxeln. Första svarta bandet representerar 3:e nivåmängden, tionde och sista svarta bandet representerar nivåmängd 21. Nivåmängderna 22 t o m 199 är alla vita för att bilden skall bli mindre blurrig. Den svarta draken (= den ifyllda juliamängden) är de punkter vars orbit inte nått utanför en radie av 10 efter 200 iterationer (kontrolleras med gamle Pythagoras sats, dvs datorn räknar på var punkt tills summan av kvadraterna av realdelen och imaginärdelen hos det komplexa talet är större än 100, uttryckt på matematiska tills $x^2 + y^2 > 10^2$, dock max 200 gånger). Matematiskt sett finns oändligt många nivåmängder innan juliamängden. När man zoomar i talplanet vid kanten av juliamängden, vilket man gör genom att undersöka ett snävare område inom det komplexa talplanet, måste man öka det maximala iterationstal (ofta kallat *maxiter)* innan datorn ger upp. Annars blir vissa pixlar vid gränsen felaktigt svarta. Eftersom

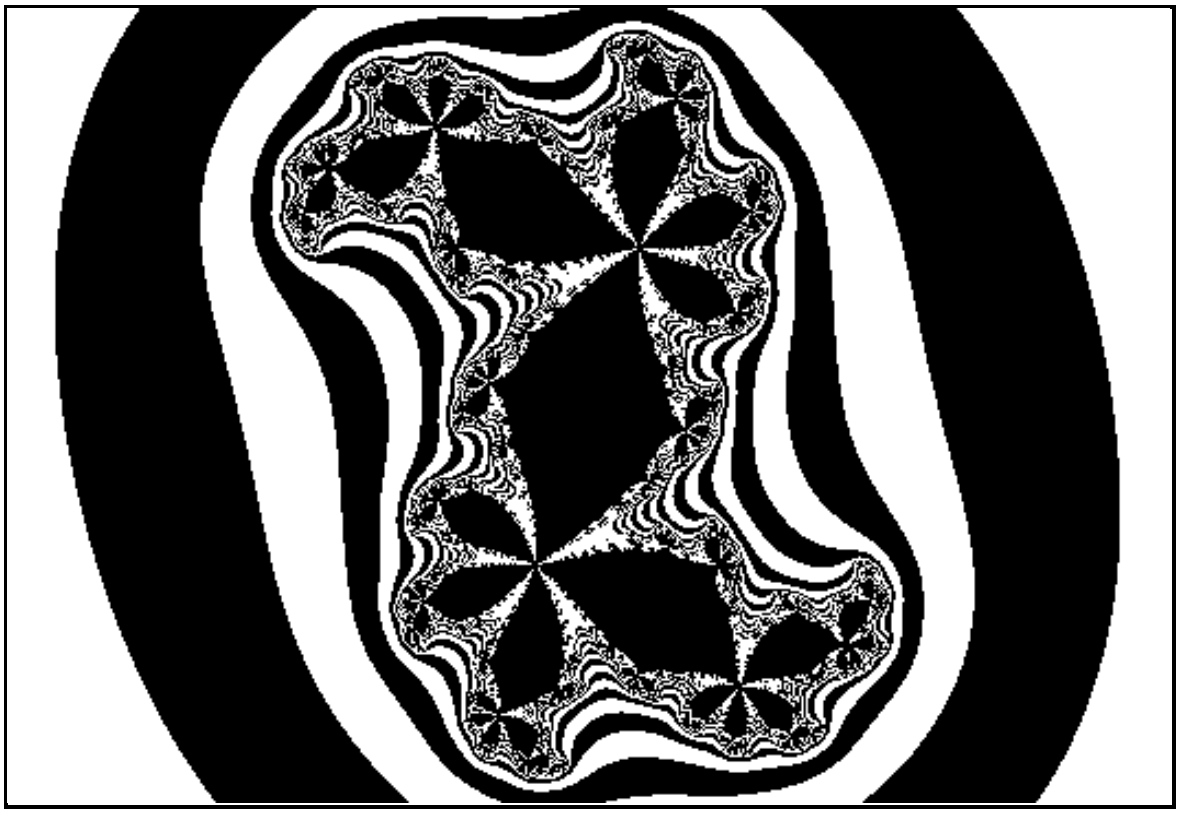


fig 10. c = 0,380 + 0,336i.

denna juliamängd är en fraktal, är dess omkrets oändligt lång. Därav följer att gränserna mellan nivåmängderna ökar i längd ju mer vi närmar oss mängden. Vissa ifyllda juliamängder är oändligt tunna, andra består av osammanhängande damm. I dessa fall är det tack vare nivåmängderna som vi kan se eller snarare ana hur de ser ut. Därmed har vi kommit till nästa kapitel, där vi skall skall göra en liten rundvandring bland de kvadratiska juliamängderna.

På övre halvan av sidan 48, näst sista sidan (Generering av juliamängder), visas visuellt vad som vi gått igenom i detta kapitel. På undre halvan visas på samma sätt visuellt hur mandelbrotmängden genereras. Men om mandelbrotmängden skall vi tala om längre fram.

8) Några juliamängder

I förra kapitlet har jag försökt beskriva den vanligaste metoden att göra färgbilder av juliamängderna, den s k *Level Set Method,* förkortat *LSM.* Det finns en annan metod som är väldigt bra att göra svartvita bilder på, speciellt för ifyllda juliamängder som inte innesluter någon domän. Den kallas *Distance Estimating Method, DEM.* Den beskrivs inte i detta kompendium, men används i följande bilder. Med den markerar vi själva juliamängden, den fraktala gränsen (svart), medan det som är utanför eller i en domän innesluten av juliamängden är vitt. Här följer nu några juliamängder inlagda i talplanet.

c = -0,5 (fig 11)
Orbits av punkter innanför juliamängden dras inte mot noll utan till -0,366, som alltså är den attraktiva fixpunkt som hör ihop med denna juliamängd. Den andra fixpunkten till höger är repellerande och tillhör som sig bör själva mängden.

c = -1 (fig 12)
Denna juliamängds fixpunkter är båda repellerande. Orbits av punkter innanför juliamängden, oavsett i vilken avknoppning, dras istället in i en s k attraktiv cykel (i detta fall t o m *superattraktiv).* De kommer så småningom att alternera mellan de *periodiska punkterna* 0 och -1 (markerade med de snedställda pilarna). Ett övertydligt exempel är startvärdet +1. Dess orbit är $1 \to 1^2 + (-1) = 0 \to 0^2 + (-1) = -1 \to (-1)^2 + (-1) = 0$; alltså $+1 \to 0 \to -1 \to 0 \to -1 \to 0$ etc. Redan efter andra iterationen har orbiten nått den attraktiva cykeln; 0, -1.

Det har alltså hänt en del när parametern c ändrats från -0,5 till -1. Någonstans på vägen har vi fått juliamängder med en attraktiv cykel av period 2 i stället för en attraktiv fixpunkt. Brytpunkten är vid -0,75 (fig 13). Här har fixpunkten till vänster som tidigare varit attraktiv övergått till att bli *indifferent,* för att sedan bli repellerande då c blir mindre än -0,75 (se föregående bild för c = -1). Orbits av punkter innanför mängden närmar sig denna fixpunkt långsamt långsamt och riktigt fram kommer den aldrig. Denna typ av indifferenta fixpunkter kallas även *paraboliska* fixpunkter.

c = 0,25 "Blomkålet" (fig 14)
Denna juliamängd har bara en fixpunkt eftersom andragradsekvationen $z = z^2 + 0{,}25$ har en dubbellösning; $z = 0{,}5$ ($0{,}5^2 + 0{,}25 = 0{,}5$). Denna fixpunkt är parabolisk. Observera att skrevet går ända in till fixpunkten.

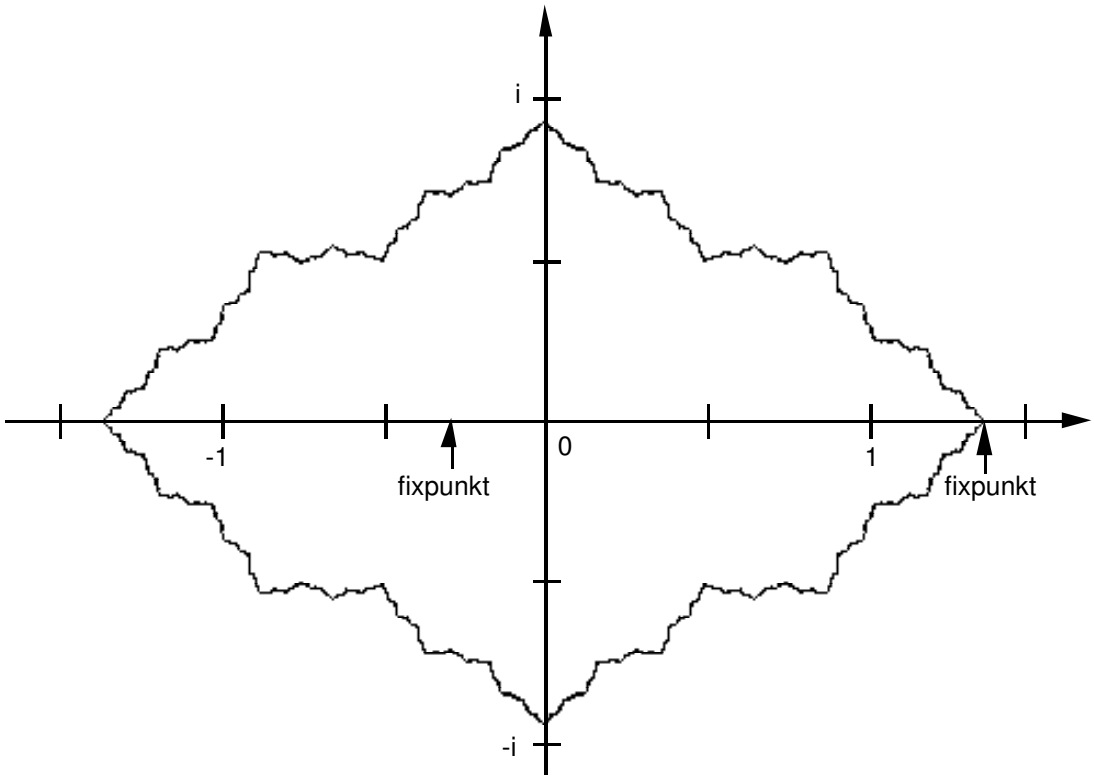


fig 11. c = -0,5.

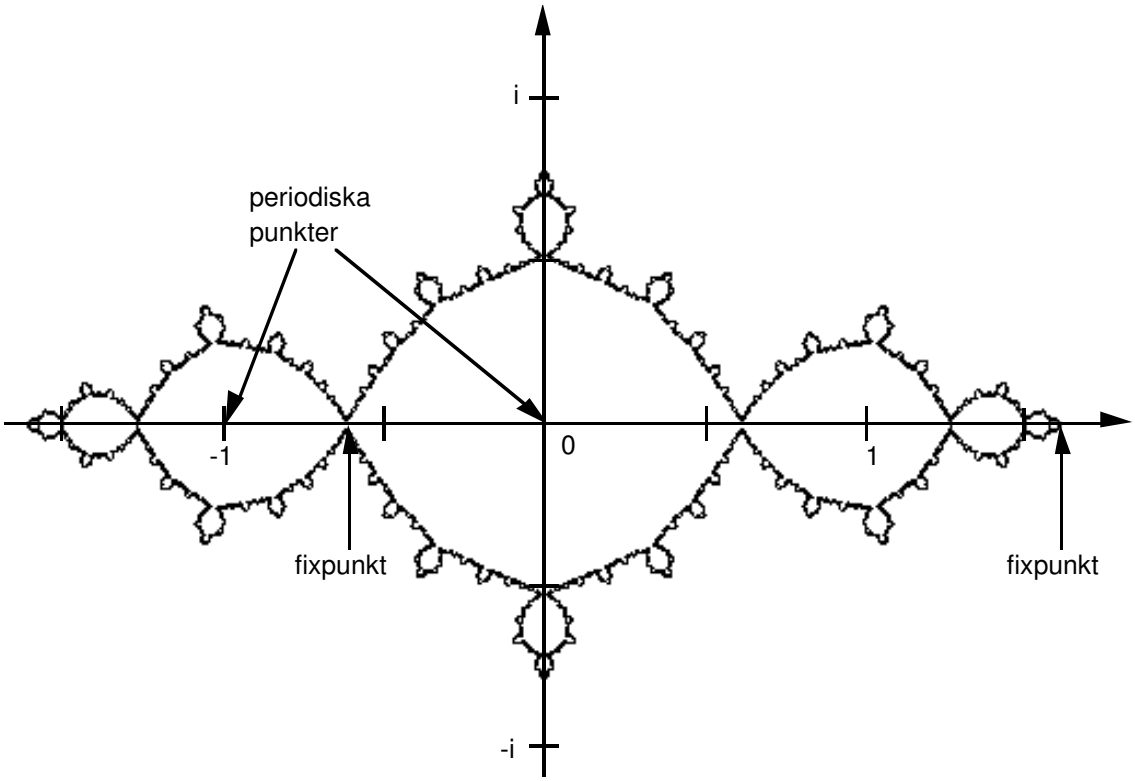


fig 12. c = -1.

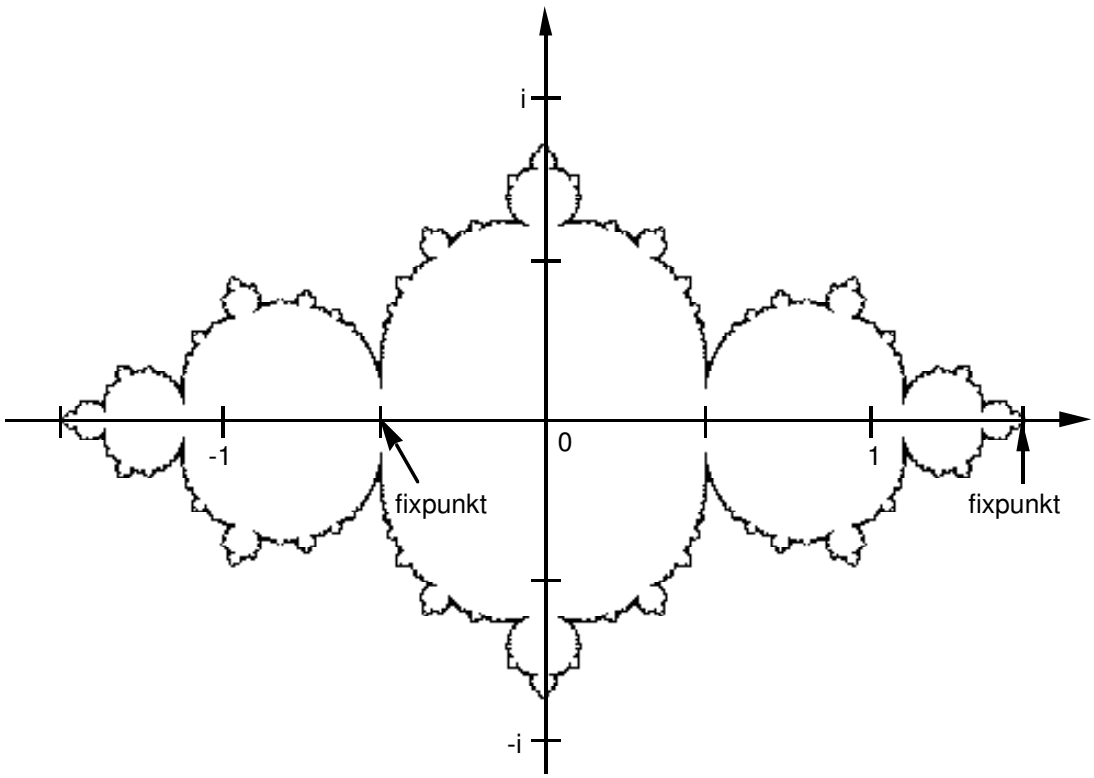


fig 13. c = -0,75.

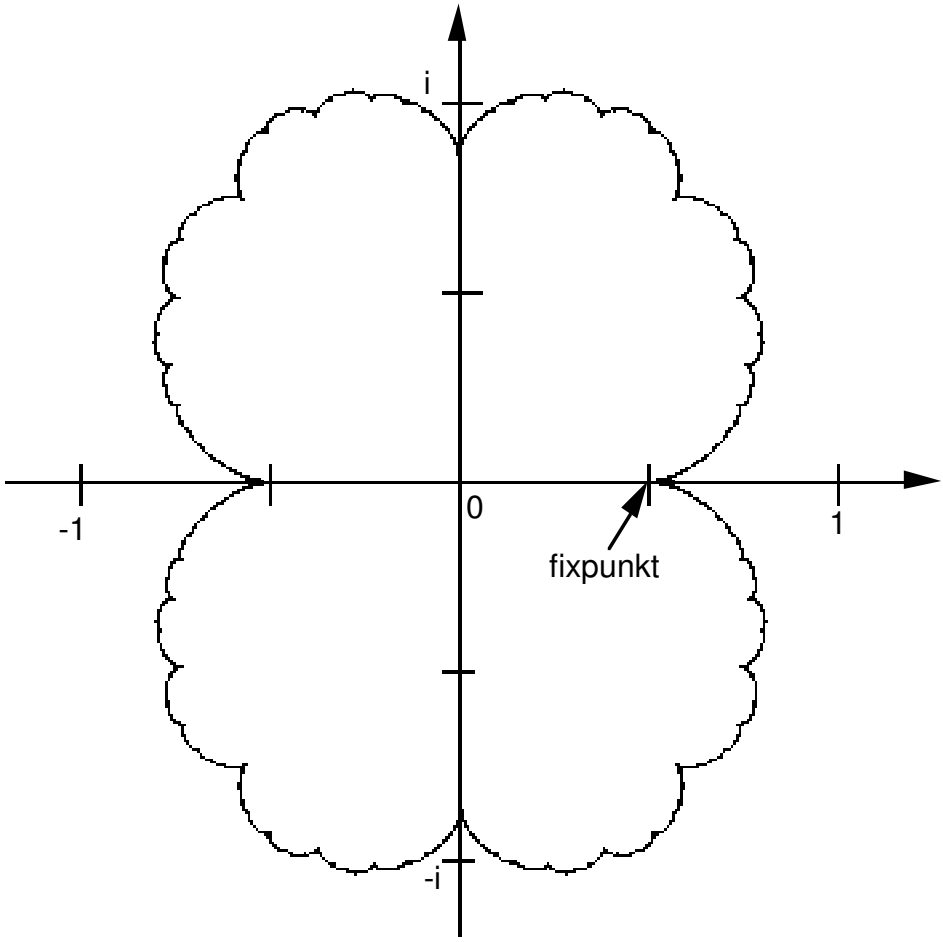


fig 14. c =+0,25.

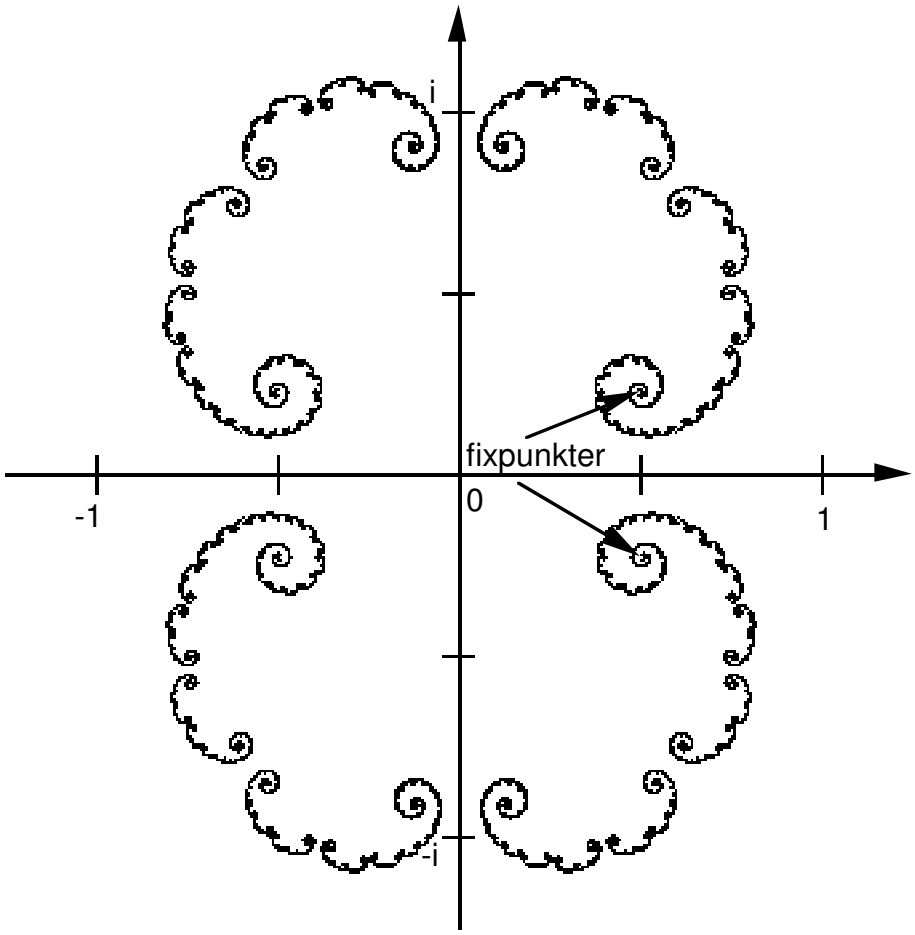


fig 15. c = +0,3.

c = 0,3 (fig 15)
Detta är vår första juliamängd som är osammanhängande. I själva verket består den av ett oändligt antal smådelar, s k cantordamm. En sådan cantormängd innesluter ingen domän och båda fixpunkterna är alltid repellerande.

c = i (fig 16)
Denna juliamängd är sammanhängande men överallt oändligt tunn.

c = -0,75 + 0,1i (fig 17)
Jämför denna juliamängd med fig 13 där c = -0,75. Här har lagts till 0,1 i imaginärled, alltså c = -0,75 + 0,1i. Ibland kan mycket små förändringar hos parametern c ge mycket stora förändringar i utseendet hos juliamängden. Bilderna talar för sig självt. Denna juliamängd är precis som för c = 0,3 (fig 15) osammanhängande.

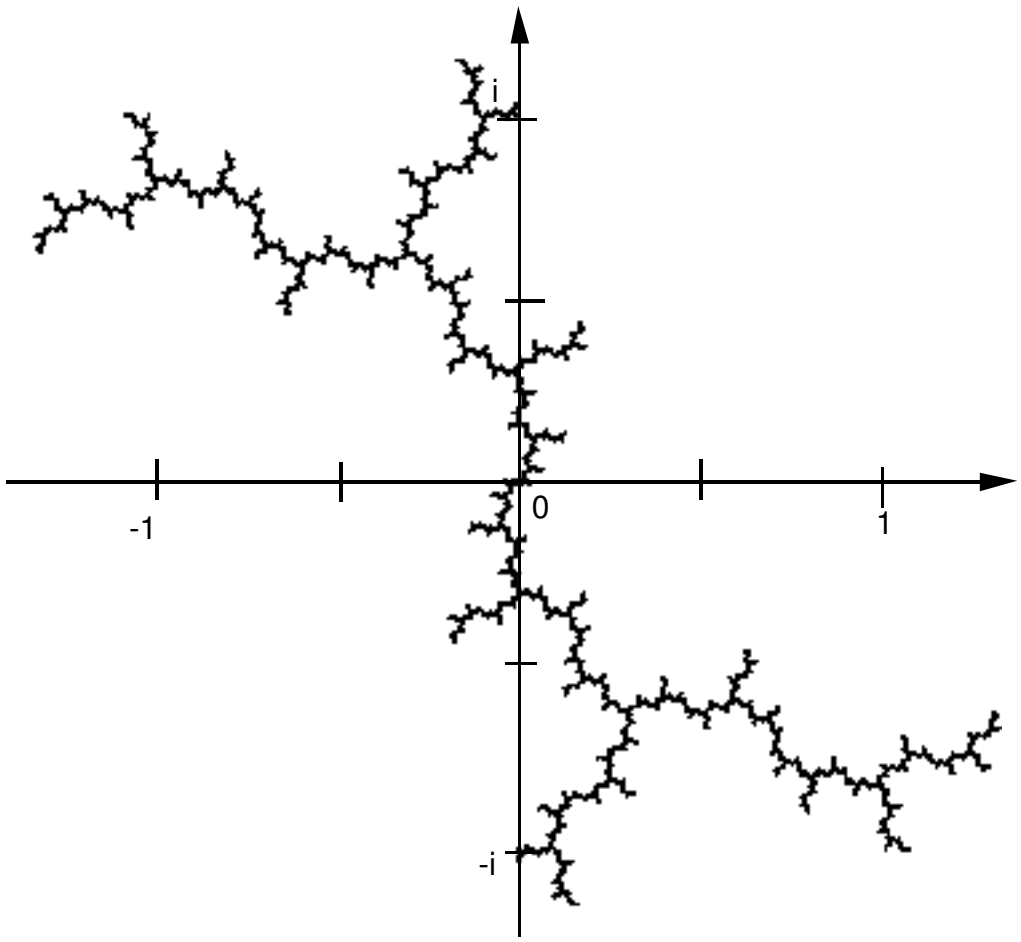


fig 16. c = i.

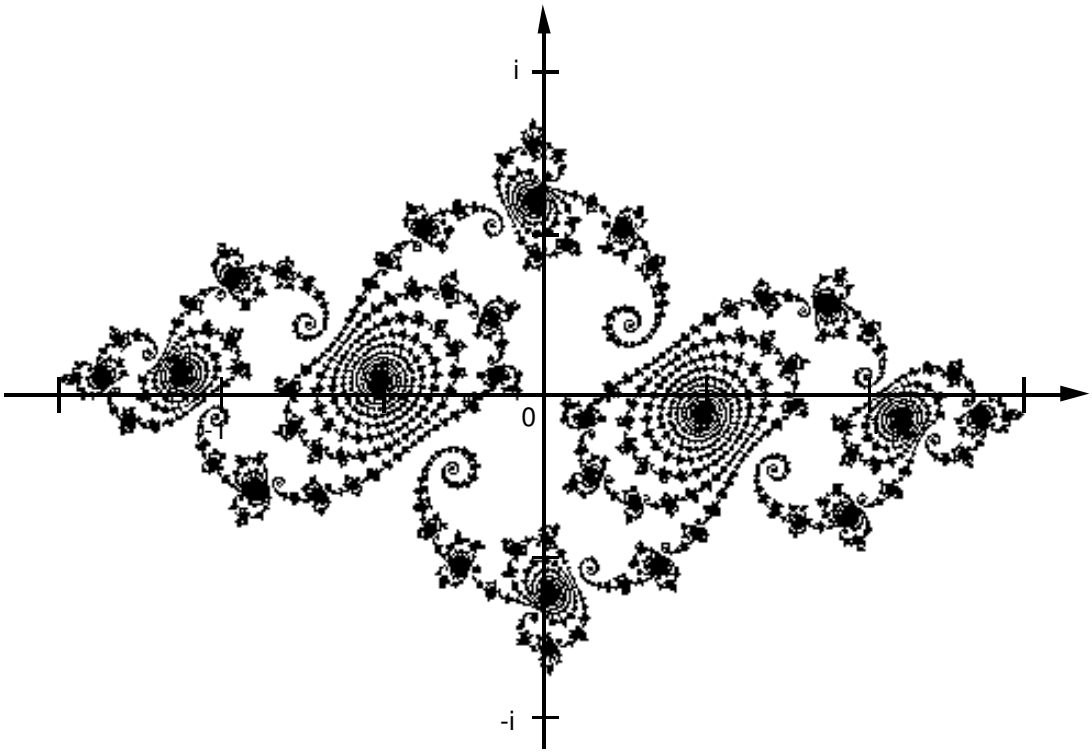


fig 17. c = -0,75 + 0,1i.

c = -0,770930800 + 0,116025118i (fig 18)
Denna juliamängd är den samma (så när som till femte decimalen) som författaren låtit göra sitt första tröjtryck av. Den är oändligt tunn i centrum av de 14-armade stjärnorna och längst in i de 2-armade spiralerna. Här och var kan man dock finna inneslutna domäner. Dessa finner man i bryggorna där spiralerna möts. Hur ser dessa inneslutna domäner ut? Vi skall göra en resa in mot mitten i två steg, där vi snabbast får svar på vår tysta fråga. Det inramade området är inzoomad i nästa bild. Inne i bryggan mellan de tvåarmade spiralerna finner vi fyra spiraler, sedan åtta mindre, sedan....., så småningom oändligt många oändligt små runt ett blomkål, likadant som fig 14 för c = 0,25. Dessa spiralgrenar utgår från "skreven" hos blomkålet. Förstorar vi upp ett intervall av en sådan gren finner vi att den består av mindre 14-armade stjärnor och spiralbryggor som slingrar sig i 2-armade spiraler. I mitten av dessa bryggorna finns mindre blomkål... . Eftersom det i själva verket är dessa blomkål som ytterst sett bygger upp grenarna är varje skrev i varje blomkål anslutet till ett eller kanske tretton skrev (eftersom stjärnorna är 14-armade) hos "anslutande" blomkål! Detta fulländade lesbiska mysterium har sin lösning blott i det oändligt lilla.

Ovanstående bilder är en provkarta på den oändliga variationsrikedom som olika juliafigurer uppvisar, en variationsrikedom som helt styrs av den komplexa konstanten c. Nu undrar säkert ärade läsare hur jag burit mig åt för att hitta ett c-värde som ger just ett blomkålshuvud inbäddad bland spiralerna och kanske mera allmänt om det finns någon bakomliggande ordning bakom dessa former? En som funderade i ungefär samma tankebanor var den inledningsvis nämnda fraktalgeometrins fader, Benoit Mandelbrot. Svaret han kom med huserar även det på det komplexa talplanet och torde vara världens mest kända fraktalfigur, sedermera uppkallad efter sin upptäckare,

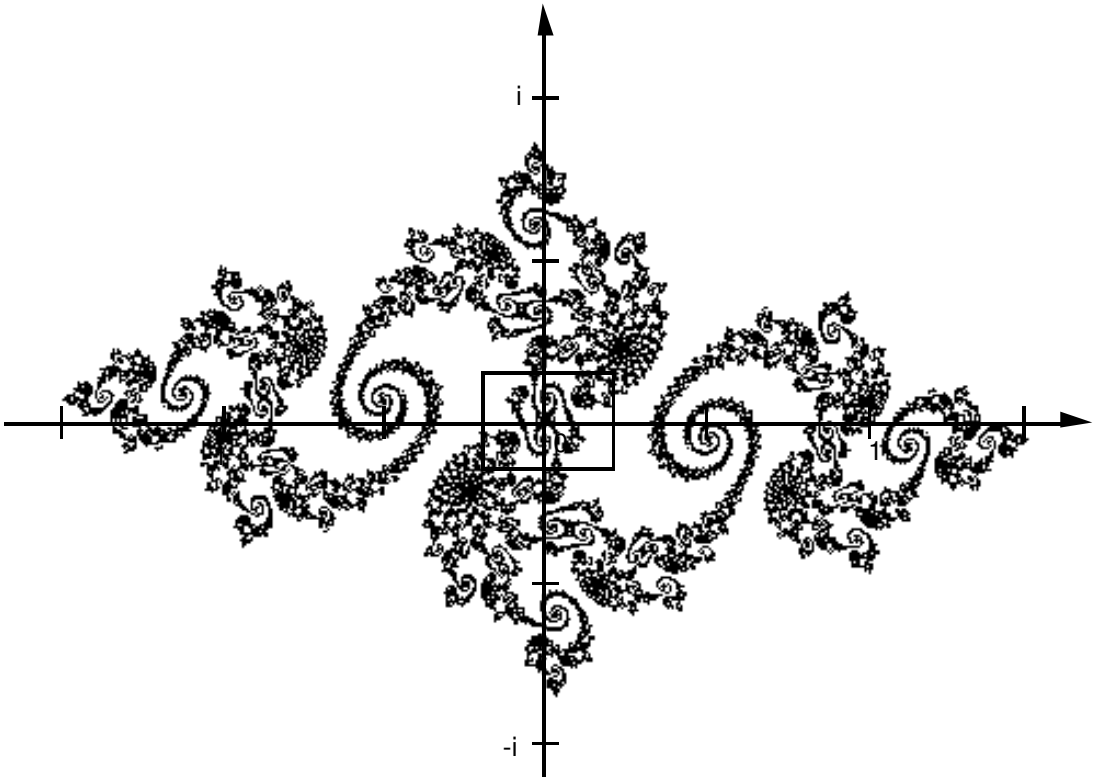


fig 18. c = -0,770930800 + 0,116025118i.

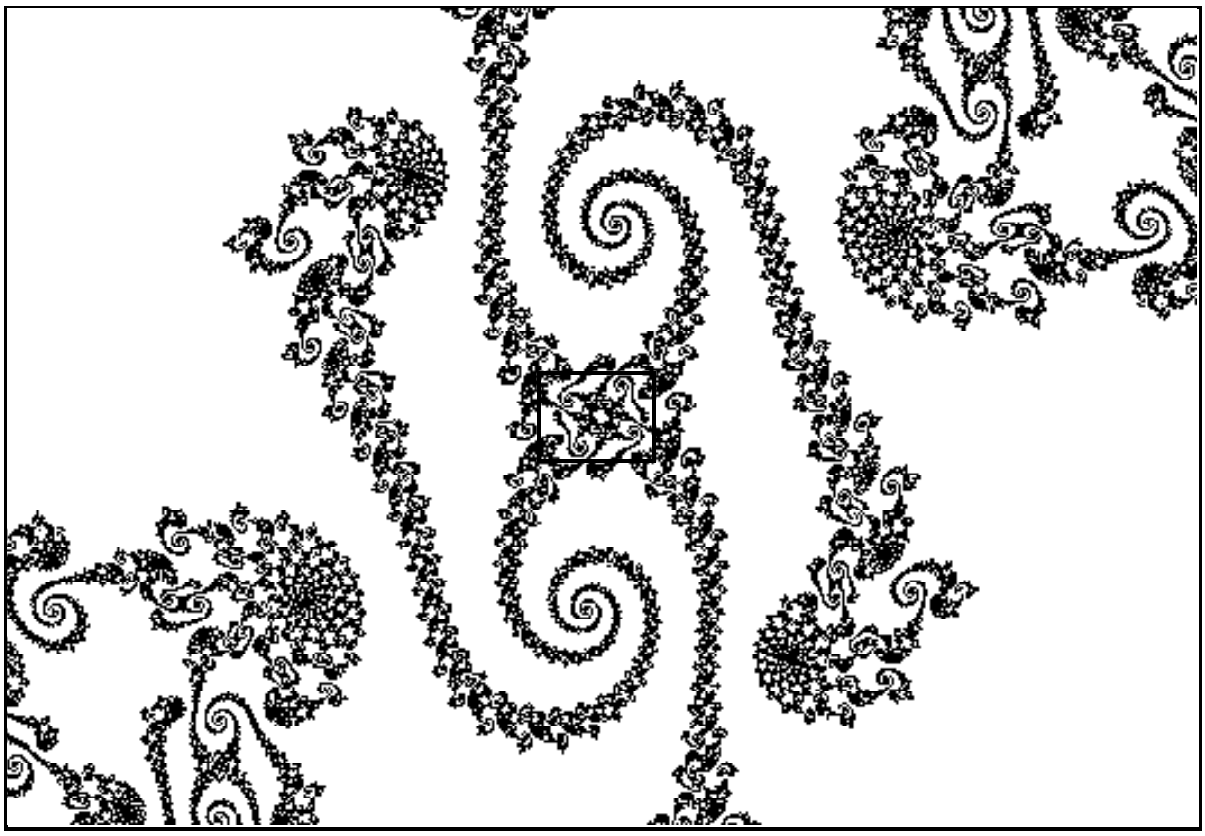


fig 19.

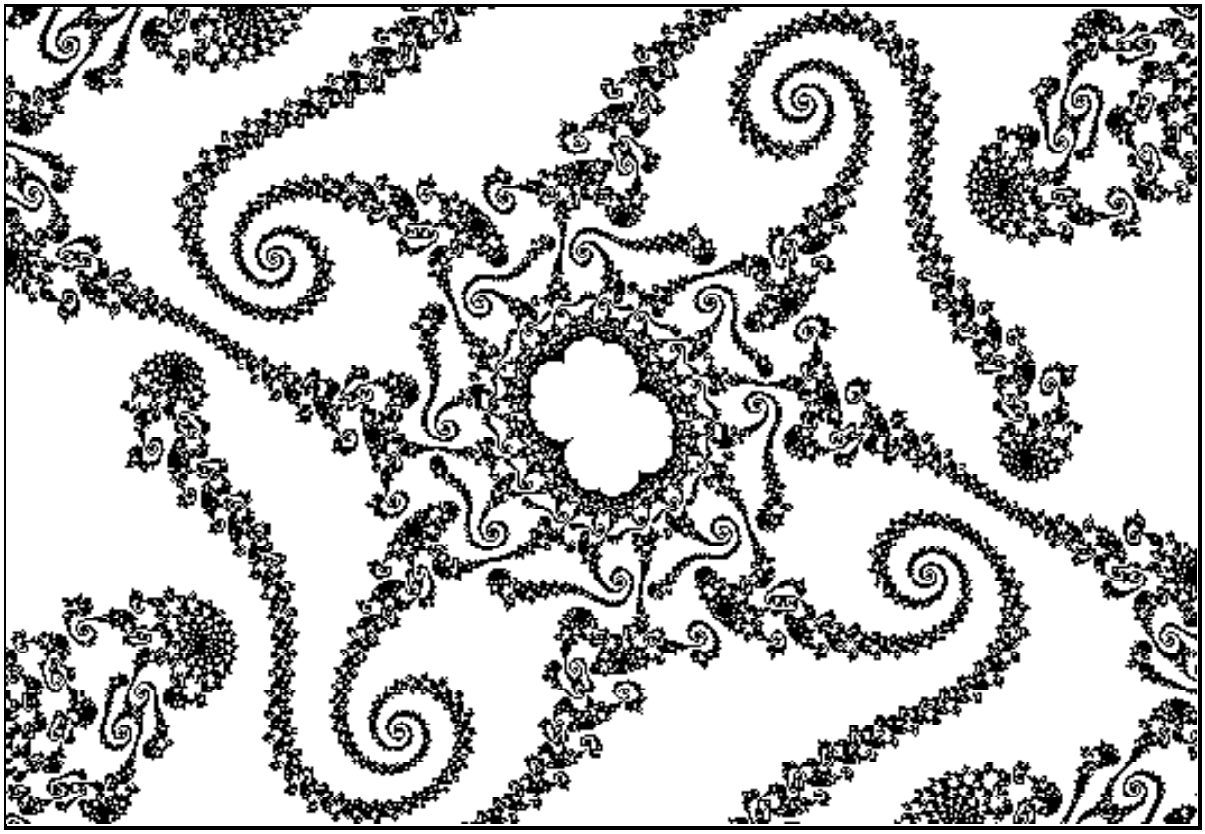


fig 20.

mandelbrotmängden. Om denna fraktalgeometrins krona skall vi tala i nästa kapitel.

9) Mandelbrotmängden

Mandelbrotmängden har med klassificeringen av juliamängder att göra. Den viktigaste skillnaden mellan olika juliamängder är mellan sammanhängande och osammanhängande, där juliamängden matematiskt sett består av ett oändligt antal smådelar. Om vi tittar på bilderna ovan. finner vi att fig 15 och 17 är osammanhängande. Vad som intresserade Mandelbrot var vilka värden på konstanten c som gav sammanhängande respektive osammanhängande juliamängder. Hur skulle du kära läsare bära dig åt för att luska reda på det? Om vi tittar igen på bilderna finner vi att beträffande de sammanhängande juliafigurerna är origo eller z = 0, d v s där realaxeln och imaginäraxeln korsar varandra, en del av den ifyllda juliamänden, medan origo inte är en del av de osammanhängande ifyllda juliamängderna. Detta är en generell regel för alla juliamängder som genereras av processen z -> z^2 + c. På matematiska säger man att punkten noll är en *kritisk punkt.* Det är med andra ord bara att låta datorn testa för vilka värden på c, som z inte växer sig oändligt stor då z = 0 är startvärde. Det är dessa värden på c som utgör den berömda mängd, som efter sin upptäckare kallas*mandelbrotmängden.* Kriteriet är alltså sålunda:

1) Endera är juliamängden för ett visst c-värde sammanhängande, varvid z = 0 tillhör den ifyllda juliamängden, d v s har en orbit som i evighet är fjättrad kring ett begränsat område kring talplanets centrum (en radie på max 2). Då tillhör detta c mandelbrotmängden och datorn tänder pixeln (bildelementet) som motsvarar detta c-värde med vanligast svart färg.

2) Eller är juliamängden för ett visst c-värde osammanhängande, varvid z = 0 inte tillhör den ifyllda juliamängden, d v s z = 0 har en orbit som efter ett visst antal iterationer börjar rusa mot oändligheten. Då tillhör detta c inte mandelbrotmängden och datorn tänder pixeln som motsvarar detta c-värde med en färg enligt en lämplig färgskala, som svarar mot det antal iterationer som orbiten för z = 0 tar på sig för att nå utanför en viss radie från det komplexa talplanets centrum. Denna radie måste vara minst 2, men kan gärna göras större (jag har precis som för juliamängderna av estetiska skäl valt radien 10).

Ett datorprogram för mandelbrotmängden är alltså nästan identiskt med ett program för juliamängderna (repetera gärna kapitel 7 "Färgerna då"). I figur 21 visas mandelbrotmängden där nivåmängderna, i brist på färg, visas med alternerande mörka och ljusa fält. Första fältet (överst och nederst till vänster) representerar nivåmängden 2, d v s för ett c-värde inom denna nivåmängd krävs 2 iterationer för att föra variabeln z utanför en radie av 10, då z = 0 är startvärde. Observera att hela det svarta området som inneslutes av fraktal-kurvan är mandelbrotmängden och inte bara själva den fraktala gränsen.

Mandelbrotfiguren ligger symmetrisk kring den reella axeln. Spetsen på antennen ligger på c= -2. Huvudet är centrerat kring c = -1 och hänger ihop med kroppen vid c = -0,75 samt vid sin huvudvårta vid c = -1,25. Skrevet ligger vid c = +0,25.

Mandelbrotfiguren eller mandelbrotmängden är alltså de c-värden som ger sammanhängande juliamängder, men inte nog med detta. Mandelbrotmängden, visar det sig, innehåller på ett märkligt sätt information om formerna hos det oändliga antalet juliamängder.Detta skall nu förklaras genom att vi tittar på var

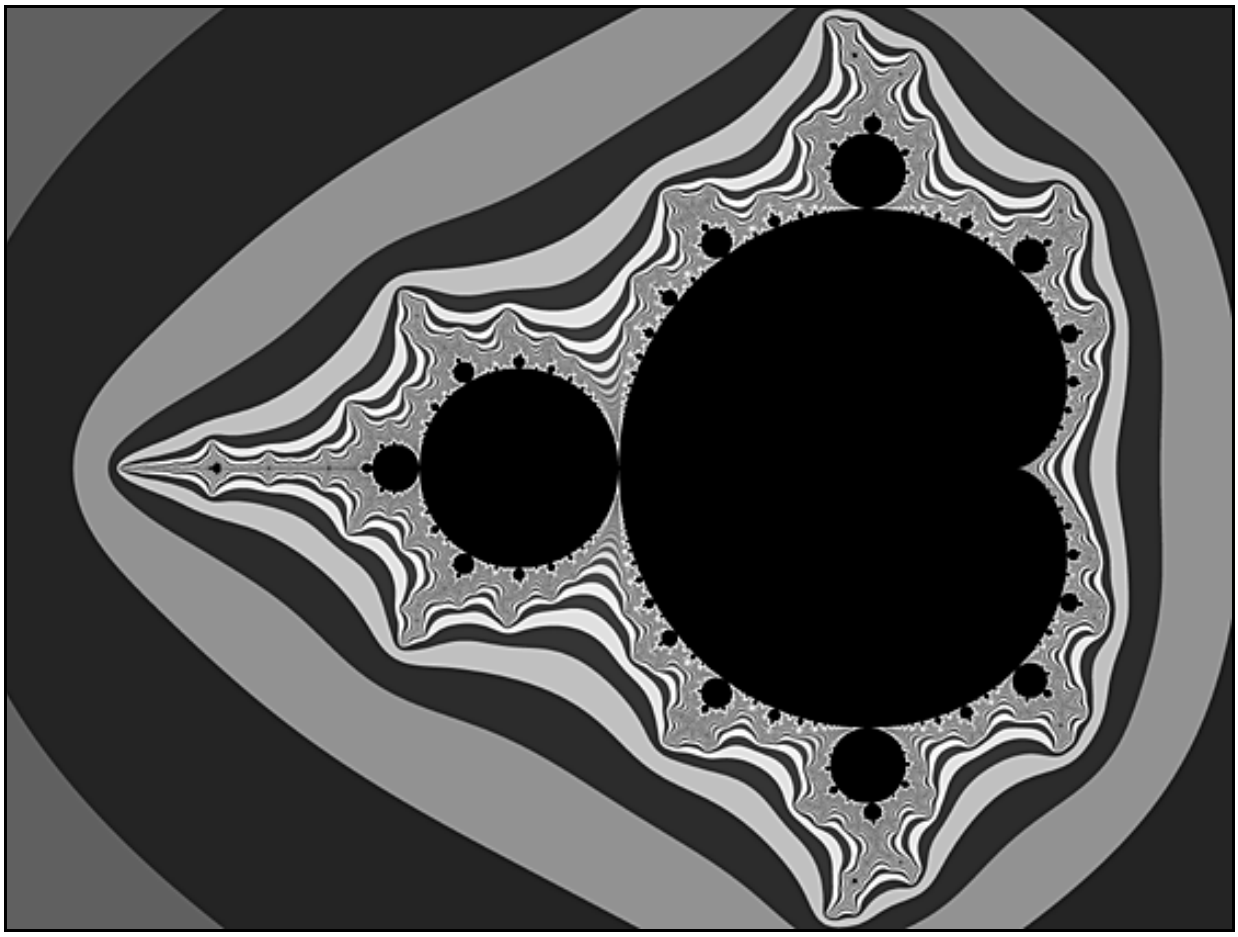


fig 21. Mandelbrotmängden omgiven av nivåmängder.

i eller utanför mandelbrotmängden värdena för parametern c till våra juliamängder ovan är hämtade. I figur 22 visas mandelbrotmängden inlagt i talplanet. De inramade bilderna runt omkring är de juliamängder som avhandlas här. Från dessa har jag efter bästa förmåga dragit pilar som markerar ställena i och utanför mandelbrotmängden som c-värdena (parametrarna) är hämtade ifrån. I bilden visas det som ligger "nära" mängden i svart med hjälp av DEM (sid 25) medan själva mängden och det som ligger klart utanför visas i vitt. Vi skall nu titta på våra juliamängder igen och därvid observera deras relation till mandelbrotmängden. Vi börjar i mitten och går först åt vänster. Därefter går vi uppifrån till höger och ner.

Parameter c = 0 ger cirkeln, vår första juliamängd. Observera att alla juliamängderna i fig 22 inte är skalenliga i förhållande till varandra.

Parameter c = -0,5 ligger också inom den hjärtformade kroppen av mandelbrotmängden. Alla c-värden som ligger inom hjärtat ger juliamängder där ena fixpunkten är attraktiv.

Parameter c = -0,75 ligger exakt där huvudet hänger ihop med kroppen. Alla juliamängder genererade av c-värden på eller nära gränsen till mandelbrotmängden har stora likheter med den region av mandelbrotmängden som c-värdet hämtats från. Alla c-värden på gränsen av hjärtat där en avknoppning ligger ger juliamängder där ena fixpunkten är parabolisk.

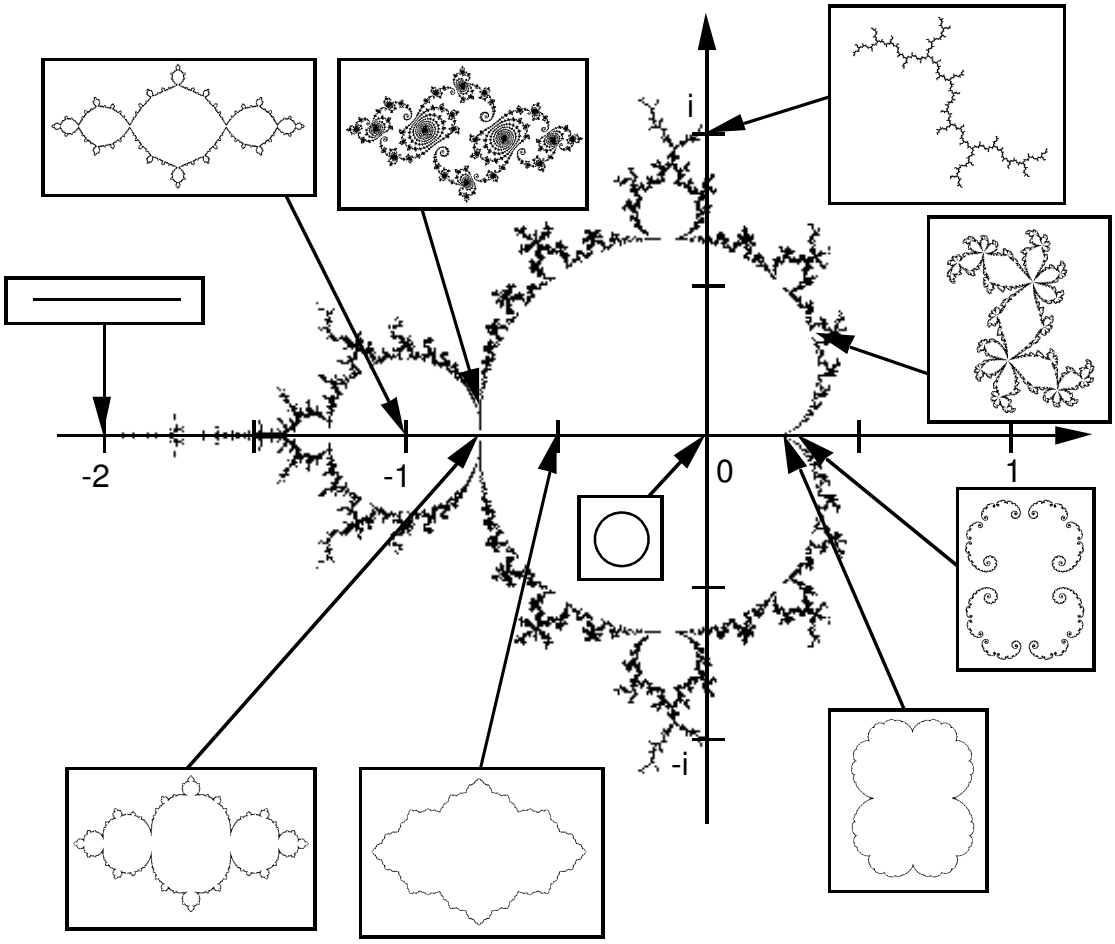


fig 22. c-värdena till ovan avhandlade juliamängder. Mandelbrotmängden utgör de c-värden (parametrar) som ger sammanhängande juliamängder.

Parameter c = -0,75 + 0,1i ligger utanför mandelbrotmängden varför juliamängden är osammanhängande och består av ett oändligt antal smådelar. Utseendet påminner om de former man finner på kroppsidan av mandelbrot-mängden 0,1 enheter ovan nacken.

Parameter c = -1 ligger mitt i huvudet. Alla c-värden tagna inifrån huvudet ger juliamängder till vilka hör en attraktiv cykel av period två.

Parameter c = -2 är den allra allra yttersta spetsen på antennen hos mandelbrotmängden. Den ger en rak linje. Att punkten tillhör mandelbrotmängden är ovanligt lätt att visa matematiskt; 0 -> 0^2 + (-2) = -2 -> $(-2)^2$ + (-2) = 4 - 2 = 2 -> 2^2 + (-2) = 2 etc.

Parameter c = i ligger också ytterst på en gren hos mandelbrotmängden (högra grenen på "y-et" högst upp). Försöker man zooma denna extrempunkt, finner man att den ligger längst in i en mycket långsam medurspiral (efter oändligt många varv). Juliamängden som den genererar är precis som föregående överallt oändligt tunn men sammanhängande. Denna är dock en fraktal påminnande om en åskblixt liknande grenen hos mandelbrotmängden som c-värdet är tagit ifrån. Att detta c-värde tillhör mandelbrotmängden är också lätt att visa om man kan räkna med komplexa tal (kapitel 4); 0 -> i -> -1 + i -> -i ->

-1 + i etc. Fr o m tredje iterationen hamnar vi i en (repellerande) cykel med perioden två. För motsvarande punkt nere till höger, d v s c = -i får vi orbiten 0 -> -i -> -1 - i -> i -> -1 - i etc, alltså samma siffror men olika tecken.

Parameter c = 0,380 + 0,336i ligger i bakre delen mitt i en knopp från vilken det utstrålar 5-armade stjärnor. Resulterande juliamängd var den första vi tittade på som var en fraktal (sid 22 - 23). Den består uteslutande av extrempunkter där inneslutna domäner hänger samman fem och fem!!! Startpunkter var som helst i vilken som helst i dessa domäner ger orbits som för eller senare fastnar i en evig 5-periodisk dans mellan de fem periodiska punkterna som ligger ungefär i centrum i de fem stora domänerna som förenas i extrempunkten i övre högra halvan. Alla c-värden inom denna knopp samt inom 14 andra komponenter hos mandelbrotmängden ger juliamängder med en attraktiv cykel med perioden 5.

Parameter c = 0,3 ligger strax bakom skrevet av mandelbrotmängden. Eftersom detta c-värde inte tillhör mandelbrotmängden, består denna juliamängd av en oändlig hierarki smådelar.

Parameter c = 0,25 ligger exakt i spetsen av skrevet längst bak på mandelbrotmängden. Så består resulterande juliamängd, vårt blomkål, också av en oändlig hierarki skrev.

En av våra juliamängder saknas i fig 22. Det är den allra sista i kapitel 8, den för c = -0,770930800 + 0,116025118i, med de 2-armade spiralerna, 14-armade stjärnorna och blomkålen i mitten av bryggorna. Denna juliamängd skall vi undersöka närmare i nästa kapitel.

10) Det lesbiska mysteriet

För att förklara denna juliamängds historia, inbjuds ärade läsare härmed på en resa en bra bit in i mandelbrotmängden mot det c-värde som är ansvarigt för vårt lesbiska mysterium (sid 30). I varje bild har jag ritat in en fyrkant som visar var nästa bild är inzoomad. Inne i bryggan mellan de båda tvåarmade spiralerna (fig 28) möts fyra tvåarmade spiraler (fig 29), sedan åtta mindre, sedan....., så småningom oändligt många, oändligt små runt inte något blomkål, men runt en gengångare av skalbaggen (Förstoringen på denna sista bild är cirka 172 580 ggr jämfört med ursprungsbilden där skalbaggen är ca 10 cm hög. Med denna förstoringsgrad skulle den vara drygt 17 km hög). Från spetsen av skrevet längst bak på denna minikopia har c-värdet hämtats som gett vår sofistikerade juliamängd. Hade c-värdet hämtats från centrum av huvudet på minikopian, hade juliamängden i fullskalemodell sett likadan ut (praktiskt sett). Däremot hade i bryggan i mitten (och i alla andra bryggor) legat en likadan figur som figur 12 sidan 26, med ett c-värde från centrum av den stora skalbaggens huvud. Därav talet om femte decimalen på sidan 28. Så långt ner i decimalutvecklingen på konstanten hänger utseendet på juliamänden längst in i bryggorna.

Man har matematiskt bevisat att hela mandelbrotmängden är sammanhängande. Minikopian, figur 29 (och alla andra minikopior), hänger

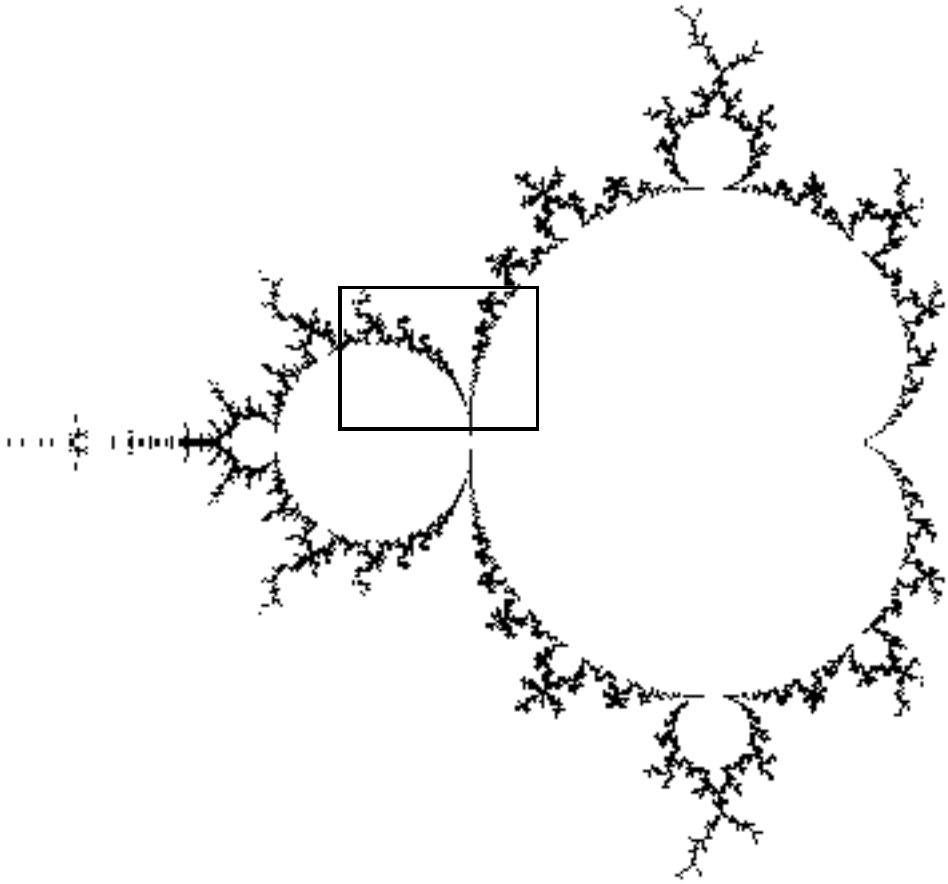


fig 23.

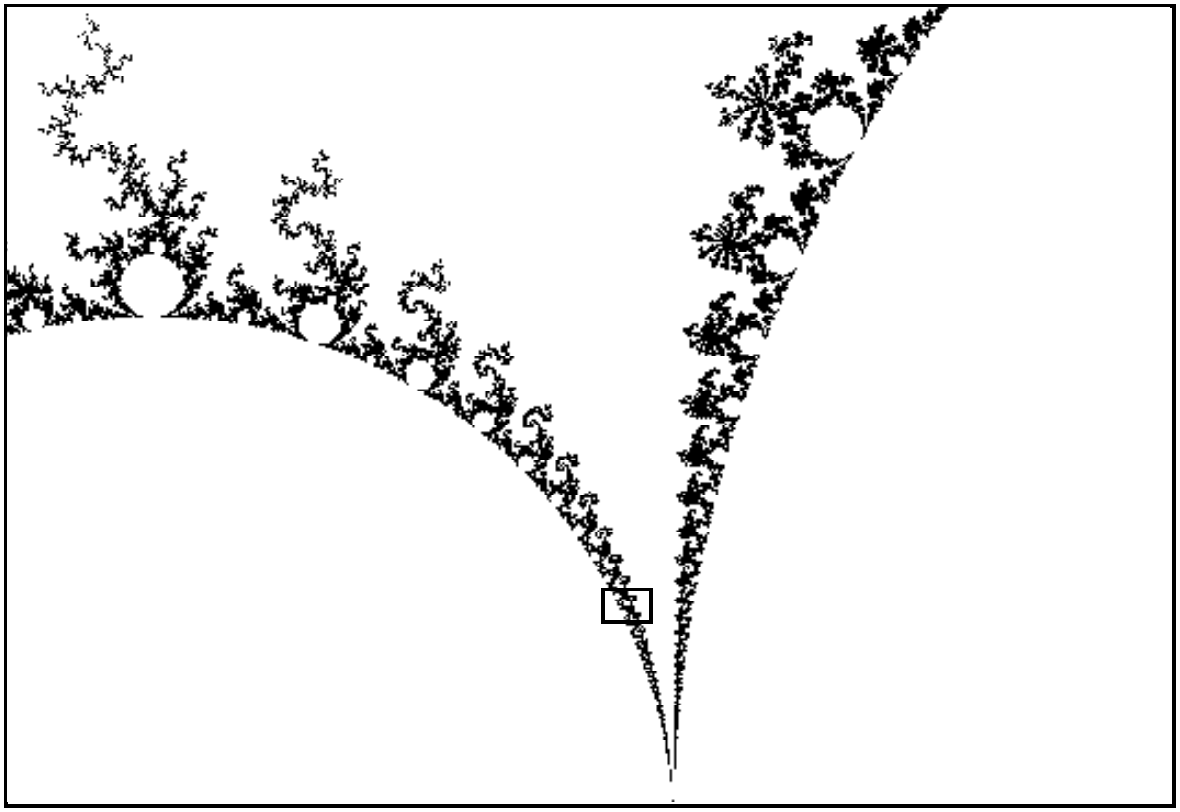


fig 24.

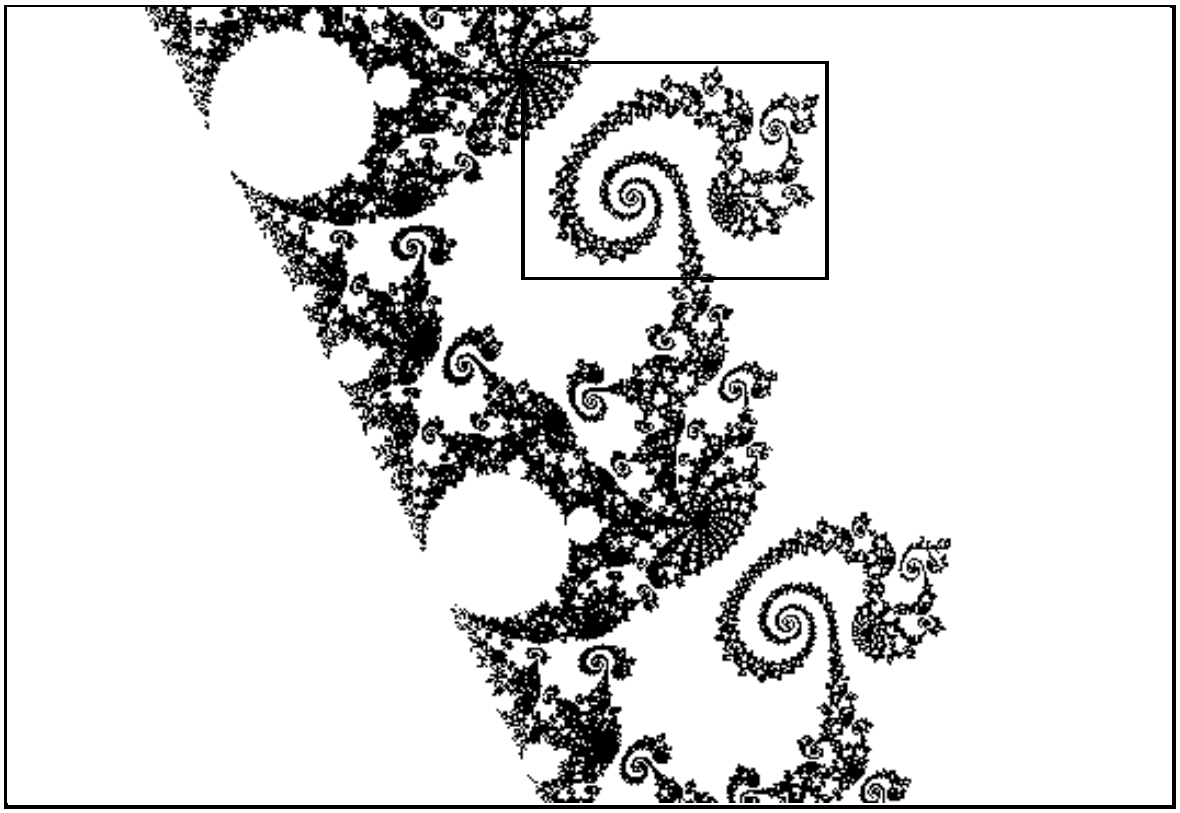


fig 25.

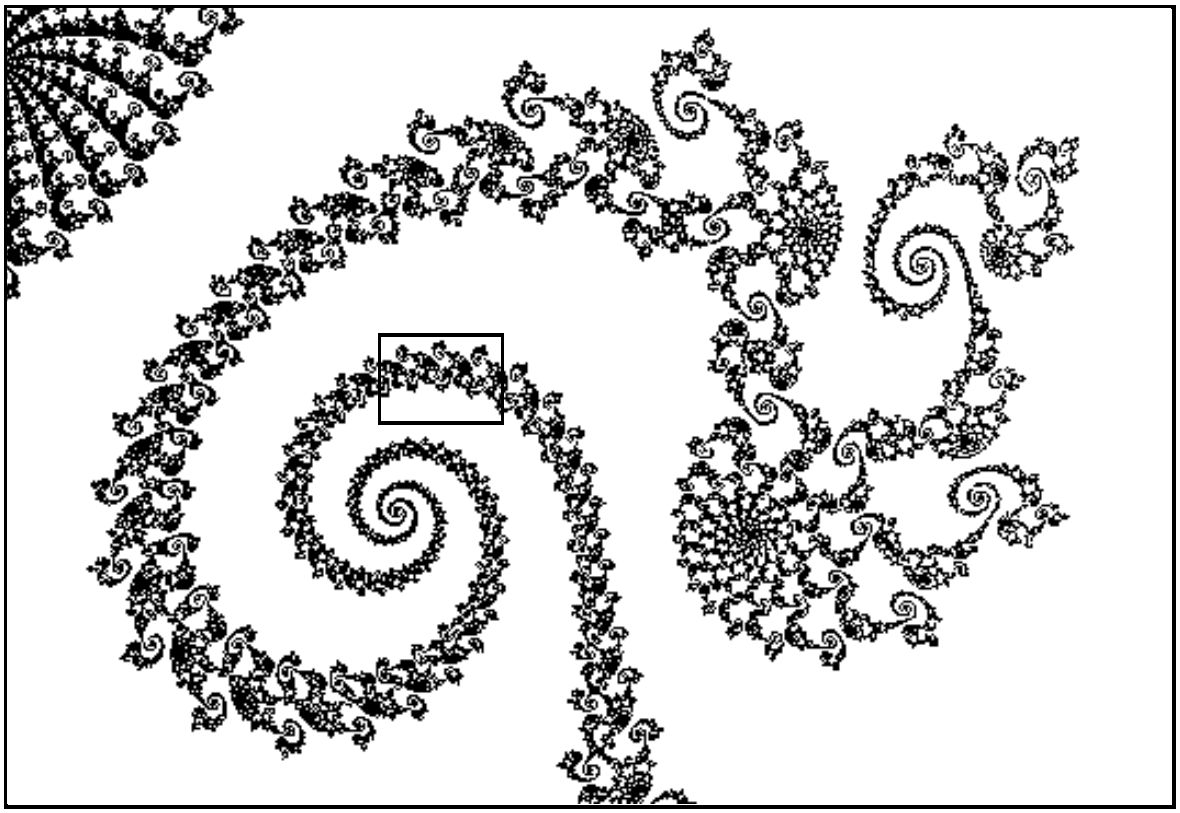


fig 26..

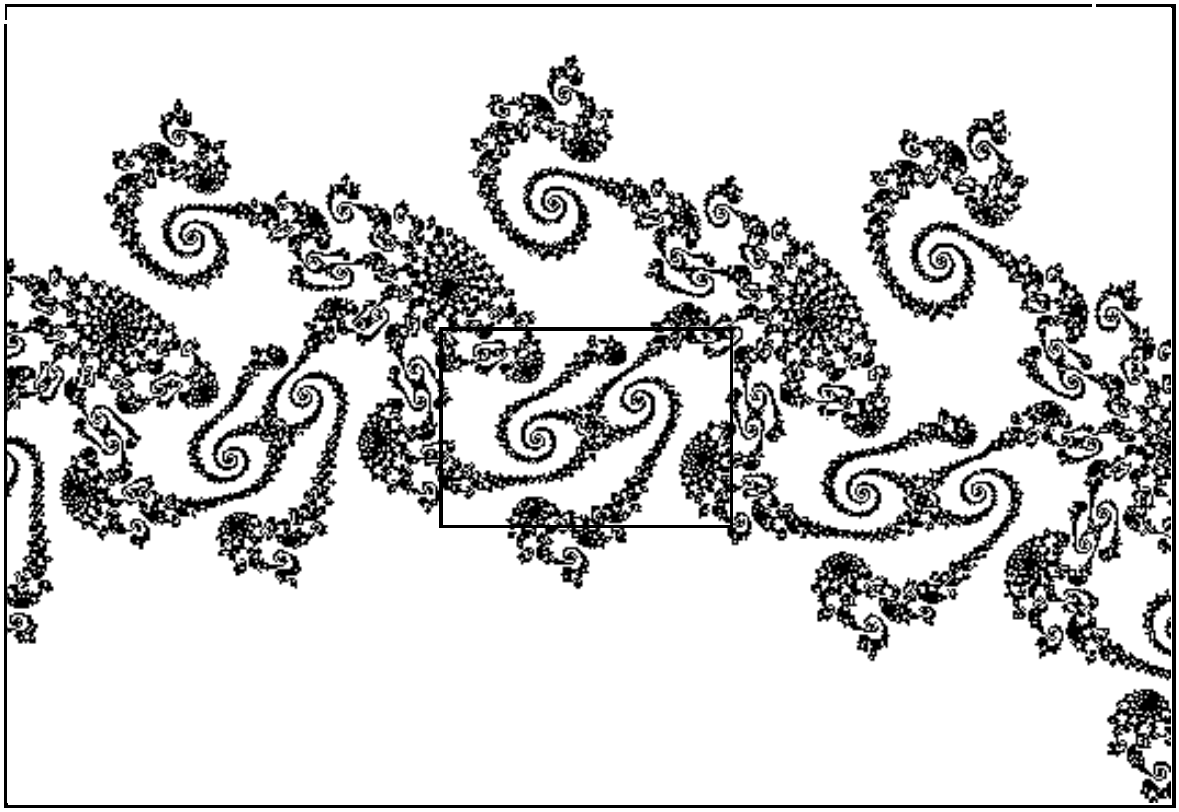


fig 27.

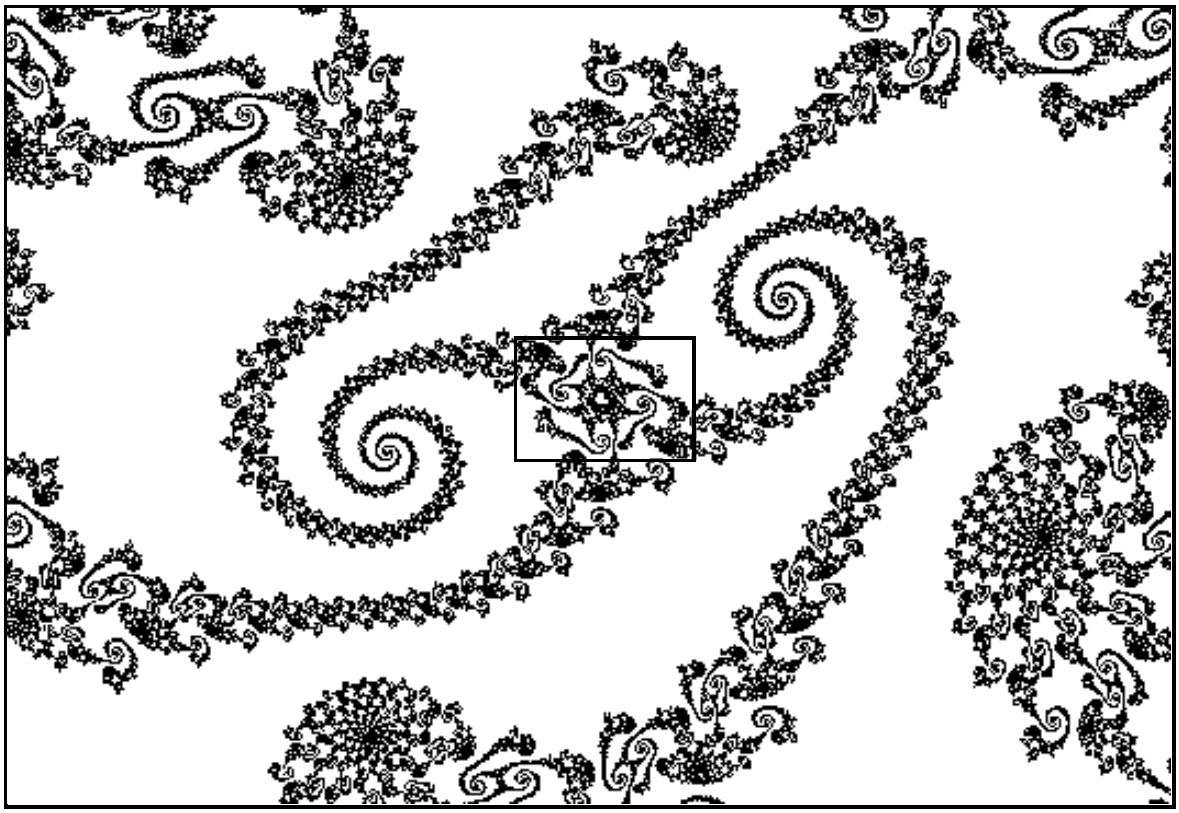


fig 28.

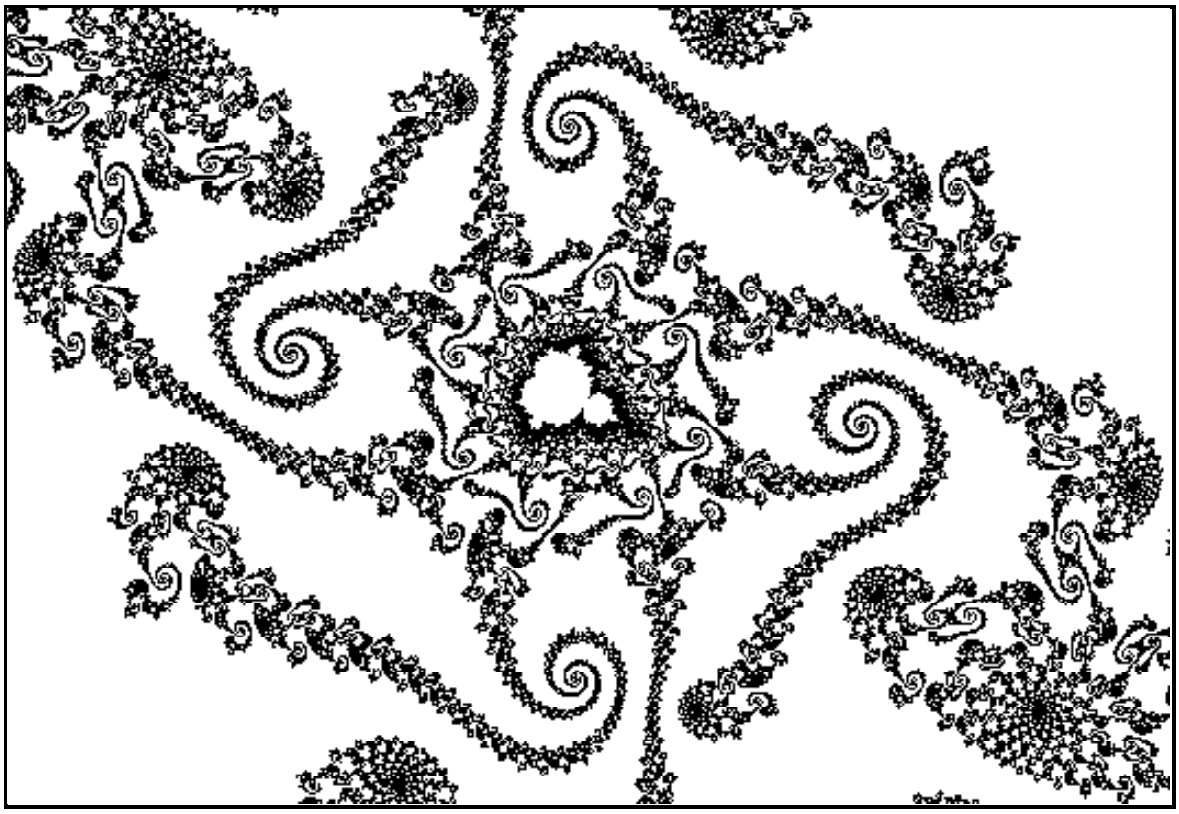


fig 29.

alltså samman med huvudfiguren på något vis!!! Det gör den via en oändligt krokig gren vars yttre kontur kan följas från fig 25 och framåt. I färgbilder är det nivåmängderna som framhäver denna kontur. Zoomar man in för att se själva grenen, finner man förr eller senare fler minikopior. Det är dessa minikopior av olika storlekar som bygger upp grenarna. Bakåt hänger var minikopia samman via en gren som går in i baken, men denna gren består ju av ännu mindre minikopior!!! Längst in i baken sticker alltså en oändligt liten minikopia sitt spjut, men detta spjut består ju i sin tur av oändligt många minikopior!!! Helt absurd blir situationen i centrum av stjärnorna. Tag t ex den nedre stjärnan i fig 25. Denna har 14 armar. Längst in i centrum av denna stjärna, ett centrum som inte finns men likväl finns, angör grenen som utgår från huvudfiguren (via en oändlig serie av av-knoppningar). Den "sista" minikopian i denna gren kör sitt spjut i 13 bakar samtidigt!!! Denna styggelse, precis som det lesbiska mysteriet fig 18 - 20 äger dock dock rum i en litenhet bortom alla oändligheter dit ingen kan komma, en intighet där alla lagar om rimligt och orimligt brutit samman.

Låt oss för ett ögonblick återvända till Juliamängden på sidan 30. Denna är precis som alla andra juliamängder självliknande i alla skalor. I mitten av alla bryggor hittar vi blomkål i likadan miljö som i alla andra bryggor. Juliamängden har en viss likhet med utseendet hos det grensystem hos mandelbrotmängden som vår minikopia är en del av. Studerar man detta grensystem (hos mandelbrotmängden) närsynt finner man dock att ingen av de 14-armade stjärnorna respektive 2-armade spiralerna är exakt lik någon annan 14-armad stjärna respektive 2-armad spiral. I mitten av var spiralbrygga ligger visserligen en minikopia av mandelbrotmängden, men ingen minikopia har en omgivning som är exakt likadan som hos någon annan minikopia. Ju närmare extrempunkter, centrum av stjärnor och slutet på spiraler, dess djupare i bryggorna får man zooma för att hitta minikopian. Detsamma gäller när man zoomar i bryggor nära andra minikopior. Det finns inget område i mandelbrotmängden som ser exakt likadant ut som något annat område vid någon förstoringsgrad. Det är därför som mandelbrotmängden på ett märkligt sätt innehåller information om formerna hos det oändliga antalet juliamängder. Dels ser olika områden av mandelbrotmängden uppenbart olika ut. Dels dyker nya former och nya överraskningar upp i all oändlighet efterhand som man tålmodigt zoomar djupare och djupare i samma område. Gränsen för hur djupt man kan förstora sätts av hur långa decimaltal programmet man använder kan hantera. Hur djupt än gränsen för ett program ligger, står man förr eller senare vid gränsen och mumlar för sig själv; "Jag skulle vilje gå in ännu djupare där och där". Eftersom fler och fler former dyker upp i all oändlighet, måste det innebära att vi till slut har att göra med mönster som i komplexitet överträffar varje jordisk struktur inklusive den mänskliga hjärnan. Man har till och med på skämt ställt sig frågan om mandelbrotmängden innehåller intelligent liv!!! Frågan är inte fullt så vrickad som det först kan tyckas. Allt detta genererat av en enkel regel som upprepas i det oändliga (folk som kan programmera säger att algoritmen för mandelbrotmängden kräver färre programrader än algoritmen för den oändligt mycket enklare von Koch snöflinga behandlad först i kompendiet). Kanske är det en dold fraktal ordning som gör att en cell kan innehålla all information om en människa? Strukturen framträder mer och mer efterhand som den iterativa processen, i detta fall celldelningen, fortskrider.

11) Vad vi inte talat om

I detta kompendium är det en förfärlig massa saker som inte avhandlats:

-Historien bakom upptäckten av juliamängderna, där en av trådarna var Newtons metod att lösa tredjegradsekvationer.

-Juliamängder och mandelbrotmängder av andra matematiska processer än $z \to z^2 + c$. Den "vanliga" mandelbrotfiguren dyker upp som ett spöke, antingen ensamt eller som en del av andra fraktalfigurer på parameterplanet vid iteration av många andra matematiska funktioner.

-Att man inom kaosforskningen har funnit att övergången från ordning till kaos följer ett matematiskt mönster, ett mönster som är detsamma oberoende vad det är för system som börjar bete sig kaotiskt. Denna övergång från ordning till kaos representeras på ett märkligt sätt av mandelbrotmängden.

-Filosofiska och kvasifilosofiska slutsatser, fast vi var på god väg sist i föregående kapitel.

-Inga datorprogram för mandelbrot- och juliafigurer har recenserats. Sådana program finns för alla datorer. Några är kommersiella, men de flesta är fricirkulerande.

Nedan ges några tips för vidare läsning. Det är böcker och kompendier som betytt mycket för min egen kunskapsinhämtning.

KAOS, vetenskap på nya vägar av *James Gleick.* Bonniers förlag. Boken kom ut på svenska 1988 och är ett spännande stycke vetenskapshistoria. Innehåller några läckra färgbilder, bl a en inzoomningsekvens i mandelbrotfiguren.

THE FRACTAL GEOMETRY OF NATURE av *Benoit B Mandelbrot.* W. H. FREEMAN AND COMPANY New York. Mandelbrots livs testamente. Boken är rikt illustrerad och behandlar alla sorts fraktaler. Endast en mindre del ägnas åt juliamängder och mandelbrotmängden.

Juliamängder av *Niklas Lindholm.* Specialarbete i matematik vid Lindälvskolan i Kungsbacka vårterminen 1991. Arbetet är en utmärkt introduktion för den som tänker ge sig i kast med nästa bok.

The Beauty of Fractals av *H.-O. Peitgen* och *P.H. Richter.* Springer-Verlag. En del kapitel verkar vara skrivna av matematikprofessorer för andra matematikprofessorer. Innehåller ett otal fraktalbilder både i svartvitt och färg. Dessa bilder har ingått i en internationell utställning om datakonst.

The Science of FRACTAL IMAGES av *H.-O. Peitgen* och *Dietmar Saupe.* Springer-Verlag. En parallellbok till ''The Beauty of Fractals'' skriven för programmerare och innehåller ett otal algoritmer för fraktalprogram. Behandlar även landskapsfraktaler.

Fraktaler BILDER AV KAOS OCH KOSMOS av *Bo E Carlsson.* Prisma. Kortfattad historisk och matematisk genomgång på en lagom nivå av alla typer av fraktaler.

FRAKTALER OCH KAOS från matematiska institutionen Umeå universitet. Kompendium och diabilder för gymnasieelever.

Mönstret på din tröja, 12-sidigt illustrerat kompendium jag själv skrivit som beskriver det matematiska och figurmässiga sambandet mellan *juliamängderna* och *mandelbrotmängden.* Samma författare som till detta kompendium. Ingår vid köp av *HANES* T-shirt eller *BEST IN TOWN* college-tröja med vacker juliafigur på (fig 18 sid 30). En föregångare till detta kompendium..

Kompendier. Till alla mina fraktalbilder ingår skräddarsydd dokumentation. F n (Juni -05) finns 28 motiv. De flesta motiven är mycket djupa förstoringar i mandelbrotmängden (ca 10^{13} - 10^{16} i vertikal längdskala) där dom djupaste förstoringarna innebär att huvudfiguren skulle vara mångdubbelt större än planetsystemet. I tillhörande kompendiier visas hela den spännande zoomsekvensen till respektive bild Ett par av dessa finns även som s k fototryck på HANES T-shirts med hela mandelbrotfiguren på baksidan. Även college tröjor finns.

Sedan hösten -96 har jag tagit fram ett antal motiv från motsvarigheten till mandelbrotmängden för kubiska polynom, d v s polynom av 3:e graden. Denna motsvarighet är ett fraktalt monstrum med utsträckning i fyra!!! rumsdimensioner, som därför får studeras i tre- eller två-dimensionella genomskärningar. Läs om "hur" och alla "varför" i den spännande dokumentationen (på minst 18-sidor) till respektive bild. Ett kort intro ges på sista sidan i detta kompendium.

Du kan även klicka "Cubic Tutorial" på min fraktala indexsida som du når via första länken på min svenska huvudsida:

http://klippan.seths.se/ik/ik

FAME: På min indexsida finns en rund symbol under vilken det står ”Artist Member of Fractal Art Museum”. Klickar du denna symbol, kommer du till en sajt, där ett stort antal skapare av fraktalbilder, bl a undertecknad, ställt ut några av sina motiv. Sajten drivs av Joseph Trotsky.

Chaotic Series: För snart två år sedan skrev jag en illustrerad artikelserie för ett par fraktala mejl-grupper. Enda förkunskapskravet för den matematiska delen är kännedom om vad komplexa tal är. Men det har ärade läsare tillgodogjorts sig i kapitel 4 i detta dokument. Exempel på titlar är, *The complete Lesbian Mystery, Cracks, where do they come from, The reason why the Trolls burst* etc. De mer än 30 artiklarna är nu redigerade som pdf-dokument och finns uppladdade på:

http://klippan.seths.se/fractals/articles

Länk finns givetvis också på min ”vanliga” sida.

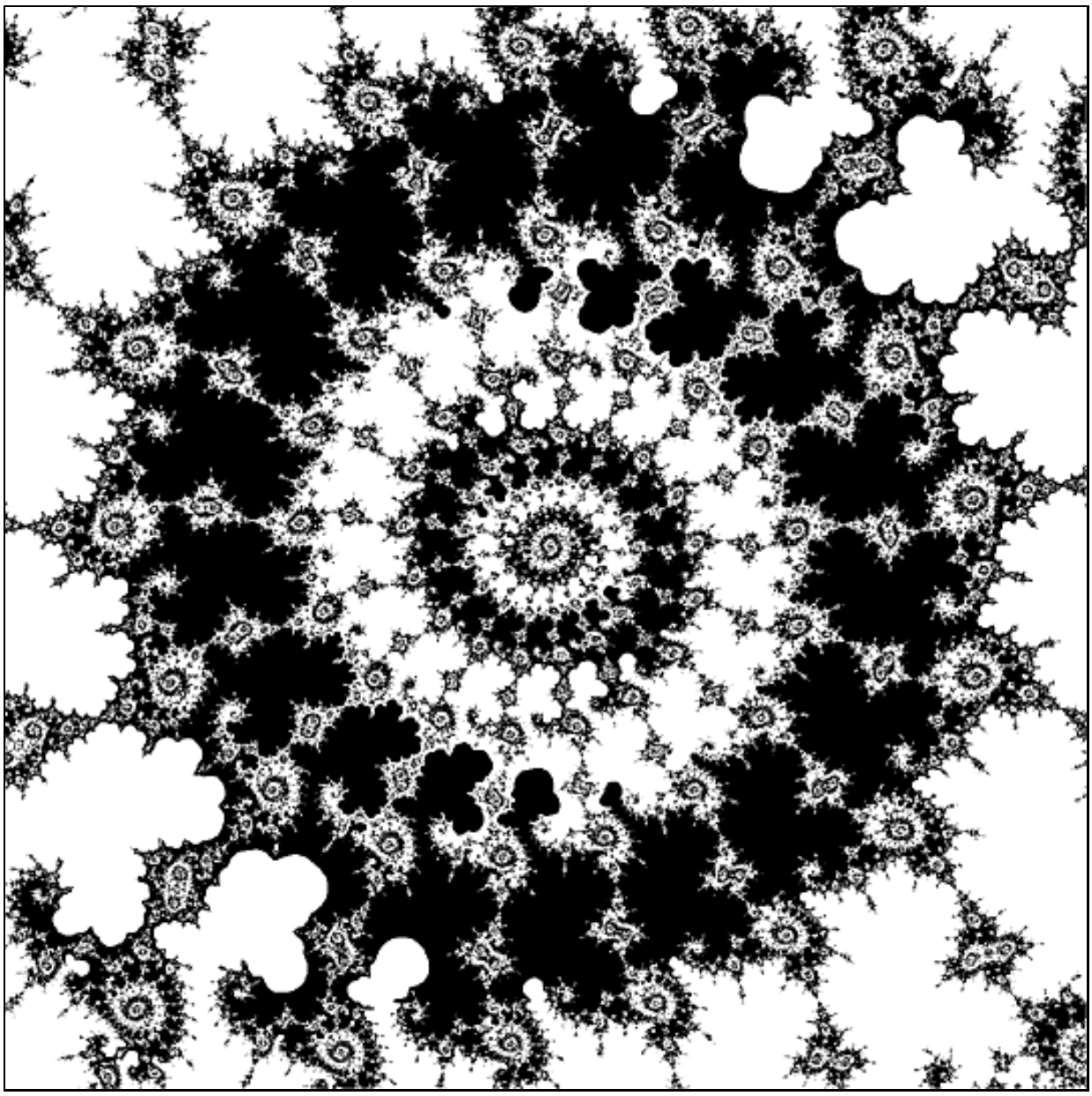
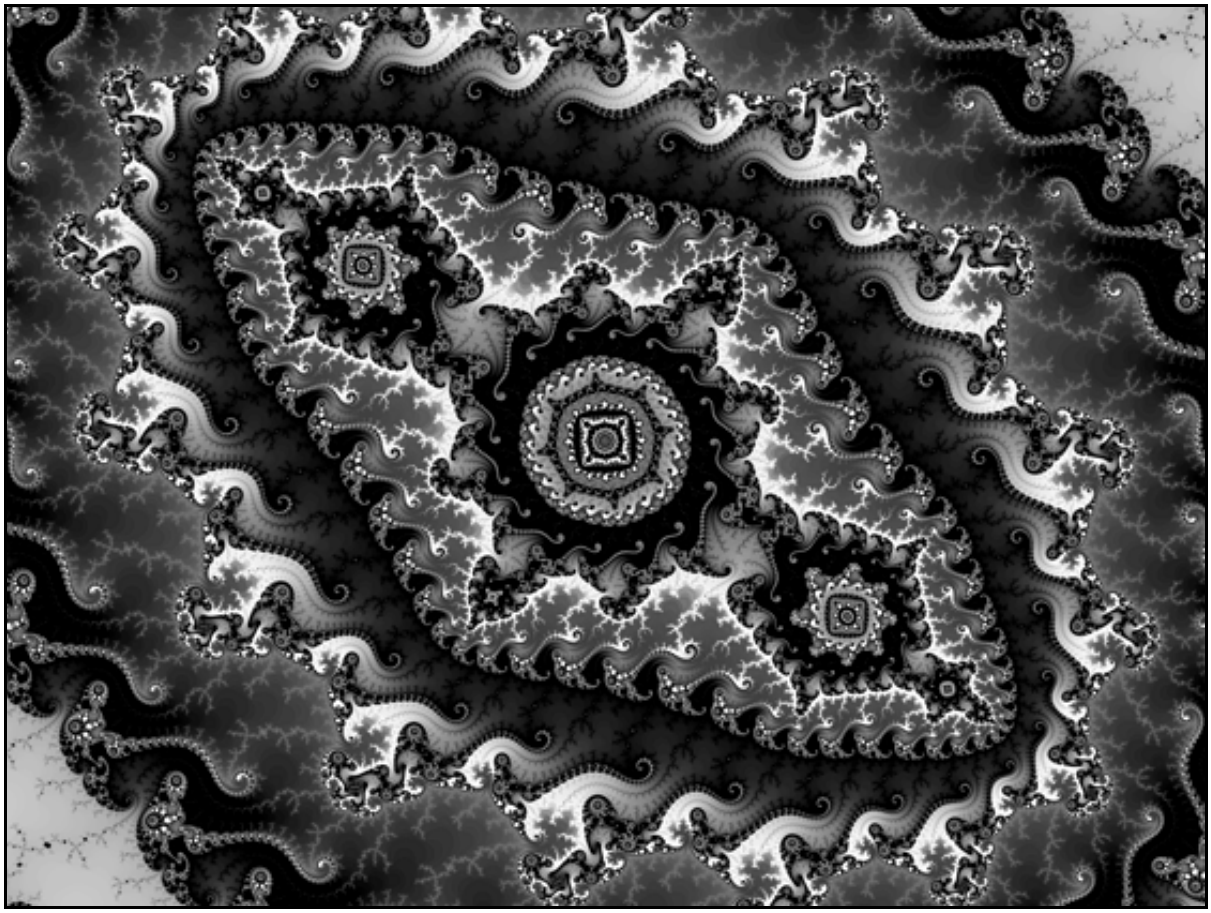
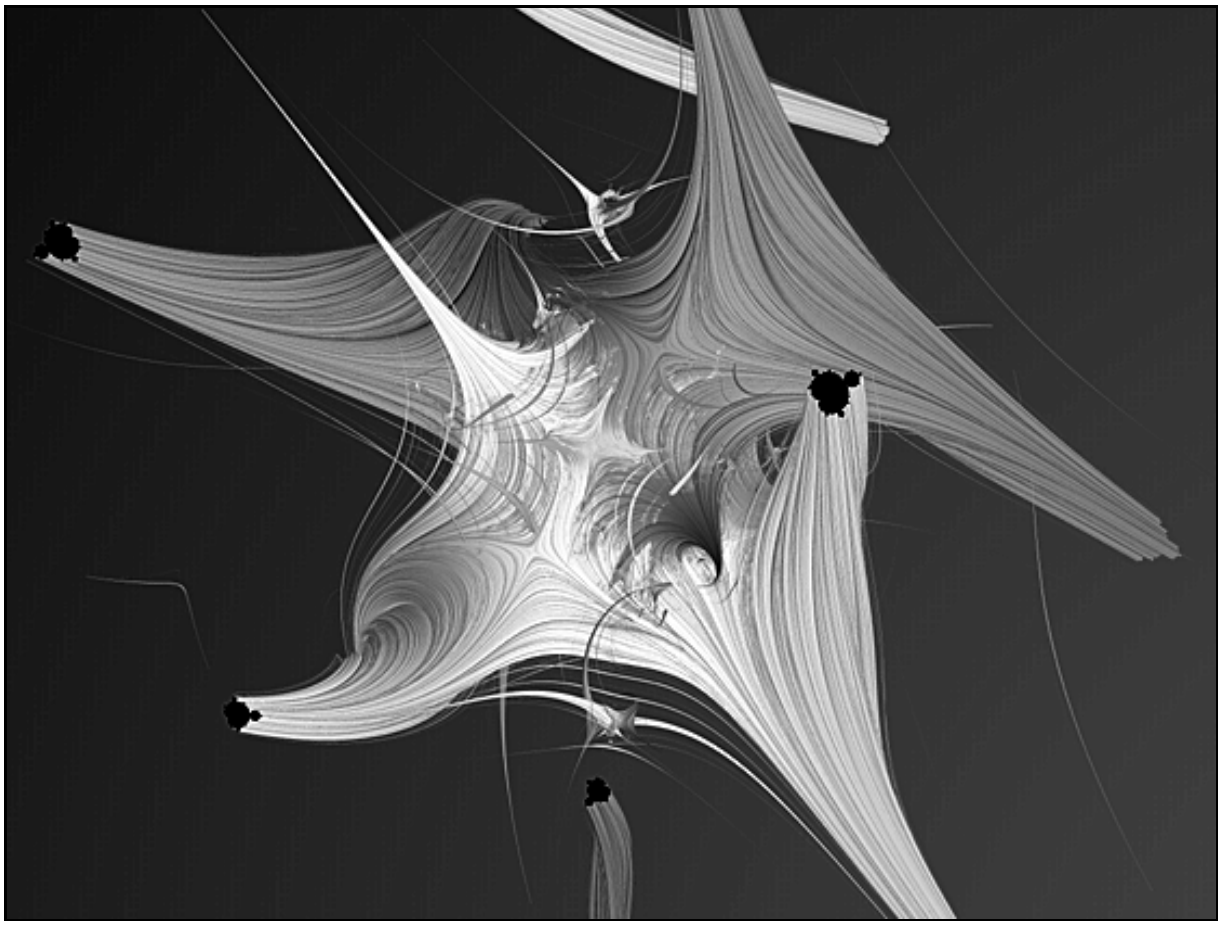


fig 30. Förstoring någonstans i (gränsen till) mandelbrotmängden. Bilden är körd med den vanliga nivåmängdsmetoden. Varje vitt och svart område omfattar respektive 40 nivåmängder. Den 17-armade stjärnan strålar ut från en intighet där alla rimlighetslagar trancenderats.

fig 31 (överst nästa sida). Jättedjup förstoring i (gränsen till) mandelbrotmängden gjord med windowsprogrammet *Fractal eXtreme.* Gråskalorna visar nivåmängderna. Om hela mandelbrotfiguren oförstorad var 1 dm lång skulle den med denna förstoring sträcka sig mer än 20 gånger utanför det överblickbara universums gräns!

fig 32 (nederst nästa sida). *Anfall från 4:e dimensionen.* Tredimensionellt ”tvärsnitt” av den fulla motvarigheten till mandelbrotmängden för kubiska polynom. Denna ”fulla motsvarighet” är ett fyrdimensionellt monster. Kommentar till bilden finns på sista sidan.





Tillägg till pdf-versionen

I) Enkelhet och komplexitet

Mandelbrotfraktalen har sitt ursprung i den mest enkla icke-linjära funktion man över huvudtaget kan iterera, $z^2 + c$, d v s en variabel i kvadrat plus en konstant (parameter). Trots att gränsen till mandelbrotmängden är en oändligt invecklad fraktal, är ”receptet” för alstrandet av den mycket enkel. För dom som lär sig programmera är ett enkelt mandelbrotprogram ren nybörjarprogrammering. Komplexiteten hos resultatet har alltså inget samband med hur komplicerad receptet eller algoritmen är. Detta skulle kunna sammanfattas med följande:

1) Algoritmen (receptet) för att generera mandelbrotmängden och detaljer av denna är mycket enkel, $z \rightarrow z^2 + c$, där $z = 0$ i utgångsläget, "c” varierar med bildpunkterna (se undre halvan nästa sida).

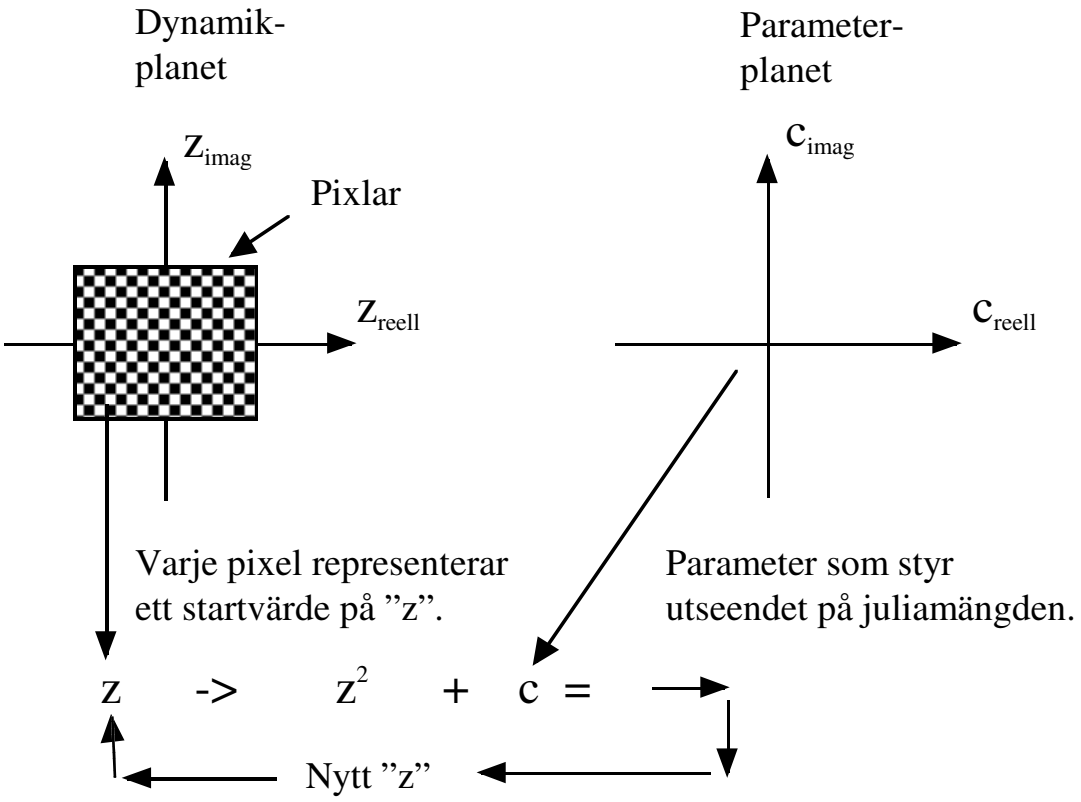
2) Beräkningarna för att ta fram en bild av densamma är dock så omfattande att, i praktiken endast en dator kan göra det. För varje bildpunkt på skärmen måste beräkningsloopen snurra kanske upp emot ett antal tusen gånger. Det gör miljoner eller kanske miljarder multiplikationer med långa decimaltal för en förhoppningsfullt vacker fraktalbild.

3) Förklaringen till att krusidullerna i dom på enkla grunder empiriskt framräknade bilderna ser ut som dom gör är dock en fråga för elitmatematikerna. Jag har för mig (när det gäller mandelbrotmängden) att det på deras rotvälska lyder något i stil med ”bla bla bla bla fundamentalgruppen av ensidigt tvåskift bla bla bla”.

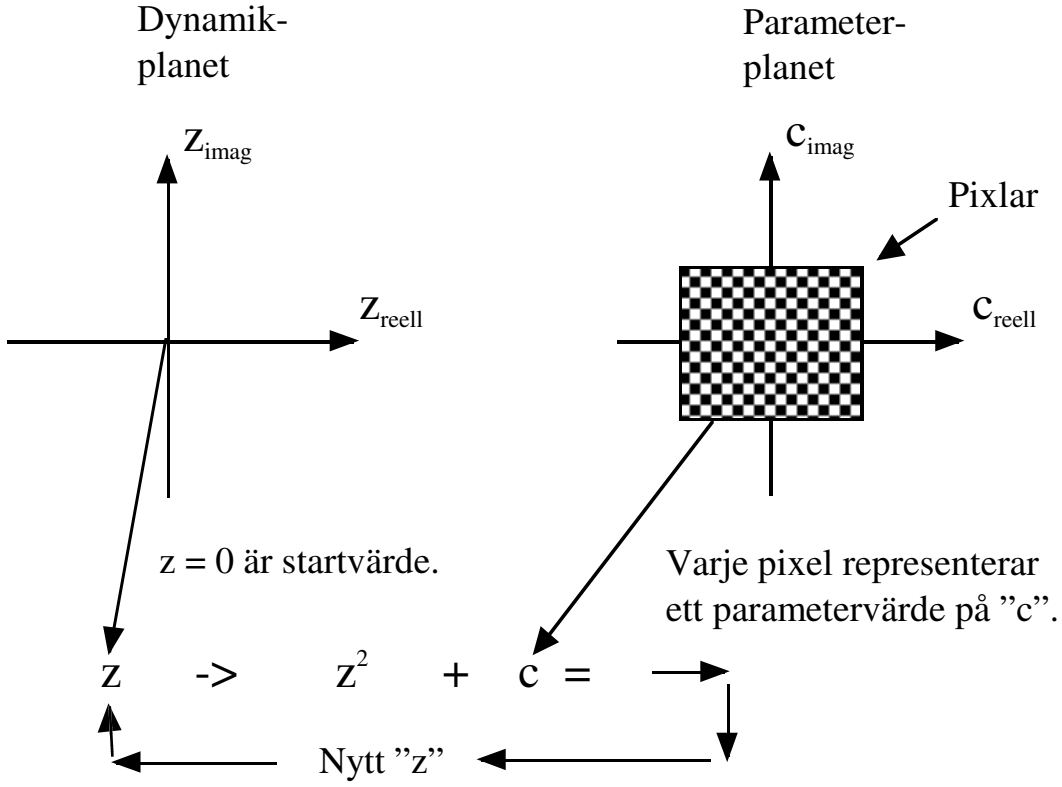
4) ”Tvåskift” är nära knutet till den matematiska leken: *Jag är ett bråk mellan 0 och 1, dubbla mig gång på gång, men blir jag större än 1 dra ifrån 1 (t ex 1/6 -> 2/6 = 1/3 -> 2/3 -> 4/3 – 1 = 4/3 – 3/3 = 1/3 etc).* Man kan se bråken som delar av ett helt varv och leken som vinkelfördubblingar. I vidstående exempel får vi alltså orbiten: *1/6 -> 1/3 -> 2/3 -> 1/3 -> 2/3 etc.* När man roterat till 4/3 varv är man i själva verket tillbaka till 1/3 varv, man har sugits in i en 2-periodisk cykel. Jämför exemplet på sidan 25 för c = -1. Ärade läsare kan själva se vad som händer om man kör denna lek med andra bråk mellan 0 och 1. Prova t ex 1/7 eller 3/7!

M a o ur yttersta enkelhet växer via ändlösa beräkningar oändlig komplexitet fram, vars förklaringar på mycket hög nivå återigen snubblar över yttersta enkelhet.

Generering av juliamängder



Generering av mandelbrotmängden



II) Den fulla motsvarigheten till mandelbrotmängden för polynom av tredje graden

Om ”trollformeln” för mandelbrotmängden relaterad till andragrads eller kvadratiska polynom är:

$$z \rightarrow z^2 + c$$

där mandelbrotmängden residerar på c- (parameter-) planet och utgörs av de komplexa parametrar (= #pixlar) ”c” för vilken den kritiska punkten z = 0 har en begränsad orbit (inte rusar mot oändligheten), lyder ”trollformeln” för den fulla motsvarigheten till mandelbrotmängden för kubiska polynom:

$$z \rightarrow z^3 - 3a^2z + b$$

där denna "fulla motsvarighet" utgörs av de komplexa parametrar, ”a” och ”b”, för vilka båda dom kritiska punkterna z = +a och z = -a har begränsade orbits (mer om dom kritiska punkterna längre ner). Eftersom varje parameter har 2 axlar, en reell och en imaginär, innebär det att vi inte har ett parameterplan utan en parameter- ”rymd” med utsträckning i fyra dimensioner, alltså en dimension mer än rummet. Om högt ärade läsare kunde röra sig ut i en fjärde dimensionen en lagom sträcka skulle ni se alla in- och ut-sidor samtidigt av det hus ni nu troligen befinner er i. Alla rum och dolda utrymmen skulle ligga vidöppna för er, inbegripet att ni skulle se alla inälvor hos folk och fä som befann sig i huset. Förutsatt att ni hade ert förstånd i behåll, skulle ni sedan kunna tömma husets eventuella kassaskåp utan att öppna låset eller lämna några som helst spår efter er. En fotboll skulle ni, genom att ta ut den i fjärde dimensionen, kunna vända ut och in utan att skada den och sedan återföra den till rummet.Eftersom vi människor inte ens kan fantisera om fler än tre dimensioner, får detta monstrum därför studeras i tre- eller två-dimensionella genomskärningar (vilket man gör genom att fixera värdet längs en eller två av axlarna och låta datorn plotta de övriga). Matematiken har däremot inga som helst fördomar om hur många dimensioner det finns.

En väldigt instruktiv sajt om fjärde dimensionen, som i sig inte har med fraktaler att göra, är:

http://www.mds.mdh.se/~mas95jed/dim/

Vidare har, som vi nämnde ovan, denna formel två kritiska punkter, z = +a och z = -a. Dom två mängder för vilka respektive kritisk punkt har begränsad orbit kallas M_+ och M_-. Sista bilden (figur 32) visar ett tredimensionellt snitt där axeln b_{imag} pekar in i 4:e dimensionen, och 3d-snittet är gjort vid $b_{imag} = 1$. Den mörka mängden är M_+ och den ljusa M_-. 3d-snitt av de båda mängderna har avsmalnande tentakler som sträcker sig hur långt ut som helst. Emellertid är dom inramade i en virituell "bur", och där tentaklerna kapas utgörs brottytorna av kopior av mandelbrotmängden. Den del som M_+ och M_- har gemensamt utgör den ”fulla motsvarigheten” till mandelbrotmängden för kubiska polynom. Mer om ”monstermatten” bakom ”cubics” kan du läsa om du klickar *Cubic Tutorial* på min indexsida. Sedan handlar dom senare delarna av artiklarna i ”Chaotic Series”, omnämnt på sidan 44, om cubics och polynom av ännu högre gradtal.